Universidade Estadual de Maringá - Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral: um KIT de Sobrevivência–**20 anos**

Integrais Impróprias

Albo Carlos Cavalheiro – Depto. de Matemática – UEL-Pr

Resumo: Neste texto apresentamos as definições de integrais impróprias e alguns dos teoremas sobre convergência e divergência de integrais impróprias (critério da comparação, teste limite da comparação e o teste de Dirichlet).

Palavras-chave: Integrais Impróprias. Critérios de Convergência.

Sumário

1 Definições de integrais impróprias

Uma condição necessária para que uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ seja integrável (segundo Riemann) é que f deve ser limitada. Observe que temos duas condições básicas: a função f é limitada e o domínio de integração $[a,b]$ é compacto. Vamos estudar integrais de funções quando uma dessas hipóteses é omitida, ou seja, as integrais impróprias.

Definição 1.1 Dizemos que uma função f é localmente integrável em um intervalo I se f é integrável em qualquer intervalo $[a,b] \subset I$.

Exemplo 1.2 A função $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ é localmente integrável em $(-\infty, \infty)$. A função $h(x) = \sqrt{x}$ é localmente integrável em $[0, \infty)$.

Definição 1.3 Seja f uma função localmente integrável em $[a, \infty)$. Definimos a integral imprópria

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$$

se o limite existir e for finito. Tal limite denomina-se integral imprópria de f estendida ao intervalo $[a, \infty)$. Neste caso, dizemos que a integral imprópria é convergente. Se $\lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$ for ∞, - ∞ ou não existir, dizemos que a integral imprópria é divergente.

Exemplo 1.4 A função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ é localmente integrável em $[1, \infty)$. Temos,

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx &= \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\Big|_1^t \right) \\ &= \lim_{t\to\infty} \left(-\frac{1}{t} + 1 \right) = 1, \end{aligned}$$

ou seja, a integral imprópria $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ é convergente.

Exemplo 1.5 A função $f(x) = \mathrm{e}^x$ é localmente integrável em $[0,\infty)$. Temos,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathrm{e}^x\,dx &= \lim_{t\to\infty}\int_0^t \mathrm{e}^x\,dx = \lim_{t\to\infty}\left(\mathrm{e}^x\Big|_0^t\right)\\ &= \lim_{t\to\infty}(\mathrm{e}^t - 1) = \infty,\end{aligned}$$

ou seja, a integral imprópria $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^x\,dx$ é divergente.

Exemplo 1.6 A função $f(x) = \cos(x)$ é localmente integrável em $[0,\infty)$. Temos que

$$\int_0^\infty \cos(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \cos(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\operatorname{sen}(t)$$

não existe, ou seja , a integral imprória $\displaystyle\int_0^\infty \cos(x)\,dx$ é divergente.

Definição 1.7 Seja f uma função localmente integrável em $(-\infty, a]$. Definimos

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^a f(x)\,dx.$$

Se o limite existir e for finito, dizemos que a integral imprópria é convergente. Caso contrário, a integral imprópria $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ é divergente.

Definição 1.8 Seja f localmente integrável em $\mathbb{R}$. Definimos

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^0 f(x)\,dx + \int_0^\infty f(x)\,dx$$

desde que ambas as integrais impróprias $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ e $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(x)\,dx$ sejam convergentes. Caso contrário, a integral imprópria $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ é divergente.

Exemplo 1.9 A função $f(x) = \mathrm{e}^x$ é localmente integrável em $(-\infty, 0]$. Temos

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^x\,dx &= \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 \mathrm{e}^x\,dx = \lim_{t\to-\infty}\left(\mathrm{e}^x\Big|_t^0\right)\\ &= \lim_{t\to-\infty}(1 - \mathrm{e}^t) = 1,\end{aligned}$$

ou seja, a integral imprópria $\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^x \, dx$ é convergente.

Exemplo 1.10 Usando os exemplos 1.5 e 1.9, temos que a integral imprópria $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^x \, dx$ é divergente.

Exemplo 1.11 A função $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ é localmente integrável em $(-\infty, \infty)$. Temos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\, dx &= \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{1}{1+x^2}\, dx = \lim_{t\to\infty} \operatorname{arctg}(x)\Big|_0^t \\ &= \lim_{t\to\infty} \operatorname{arctg}(t) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

De modo análogo, também obtemos que $\int_{-\infty}^{0} \dfrac{1}{1+x^2}\, dx = \dfrac{\pi}{2}$. Portanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\, dx + \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Exemplo 1.12 A função $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$ é localmente integrável em $[1, \infty)$. Usando que

$$\int \frac{1}{x^p}\, dx = \frac{x^{1-p}}{1-p}, \quad \text{se} \quad p \neq 1,$$
$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln(x), \quad \text{se} \quad p = 1,$$

obtemos que

(i) $\int_1^\infty \dfrac{1}{x^p}\, dx = \dfrac{1}{p-1}$, se $p > 1$, ou seja, convergente;

(ii) $\int_1^\infty \dfrac{1}{x^p}\, dx = \infty$, se $p \leq 1$, ou seja, divergente.

Exemplo 1.13 Vamos determinar o valor de $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} x^n \, dx$, para $n \in \mathbb{N}$, usando indução e integração por partes.

(i) Temos para $n = 1$,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x\,\mathrm{e}^{-x}\,dx &= \lim_{t\to\infty}\int_0^t x\,\mathrm{e}^{-x}\,dx \\
&= \lim_{t\to\infty}\left(-\,x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}\Big|_0^t\right) \\
&= \lim_{t\to\infty}[(-t\,\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t}) + 1] \\
&= 1 = 1!.
\end{aligned}$$

(ii) Para $n = 2$, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x^2\,\mathrm{e}^{-x}\,dx &= \lim_{t\to\infty}\int_0^t x^2\,\mathrm{e}^{-x}\,dx \\
&= \lim_{t\to\infty}\left(x^2\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^t + 2\int_0^t x\,\mathrm{e}^{-x}\,dx\right) \\
&= \lim_{t\to\infty}\left(t^2\mathrm{e}^{-t} + 2\int_0^t x\,\mathrm{e}^{-x}\,dx\right) \\
&= 2\int_0^\infty x\,\mathrm{e}^{-x}\,dx \\
&= 2 = 2!.
\end{aligned}$$

(iii) De forma análoga obtemos $\displaystyle\int_0^\infty x^3\mathrm{e}^{-x}\,dx = 6 = 3!$.

(iv) Suponha que $\displaystyle\int_0^\infty x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,dx = n!$. Temos,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x^{n+1}\,\mathrm{e}^{-x}\,dx &= \lim_{t\to\infty}\int_0^t x^{n+1}\,\mathrm{e}^{-x}\,dx \\
&= \lim_{t\to\infty}\left(-\,x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^t + (n+1)\int_0^t x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,dx\right) \\
&= \lim_{t\to\infty}\left(-\,t^{n+1}\mathrm{e}^{-t} + (n+1)\int_0^t x^n\mathrm{e}^{-x}\,dx\right) \\
&= (n+1)\int_0^\infty x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,dx \\
&= (n+1)n! \\
&= (n+1)!
\end{aligned}$$

Portanto, $\displaystyle\int_0^\infty x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,dx = n!\ (n\in\mathbb{N})$.

Teorema 1.14 *Suponha que $f_1, ..., f_n$ sejam localmente integráveis em $[a, \infty)$ e que $\int_a^{\infty} f_j(x)\, dx$ sejam convergente, $j = 1, 2, ..., n$. Se $c_1, ..., c_n$ são constantes, então $\int_a^{\infty} (c_1 f_1 + ... + c_n f_n)(x)\, dx$ é convergente e*

$$\int_a^{\infty} (c_1 f_1 + ... + c_n f_n)(x)\, dx = c_1 \int_a^{\infty} f_1(x)\, dx + ... + c_n \int_a^{\infty} f_n(x)\, dx.$$

Demonstração Se $a < t < \infty$ temos

$$\int_a^{t} (c_1 f_1 + ... + c_n f_n)(x)\, dx = c_1 \int_a^{t} f_1(x)\, dx + ... + c_n \int_a^{t} f_n(x)\, dx.$$

Logo, passando o limite quando $t \to \infty$, obtemos o resultado. $\square$

Definição 1.15 Seja f uma função não limitada em $(a, b]$ e integrável em $[t, b]$, para todo $t \in (a, b)$. Definimos a integral imprópria de f em $(a, b]$ por

$$\int_a^{b} f(x)\, dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^{b} f(x)\, dx.$$

Se o limite existir e for finito, dizemos que a integral imprópria $\int_a^{b} f(x)\, dx$ é convergente. Caso contrário, a integral imprópria $\int_a^{b} f(x)\, dx$ é divergente.

Exemplo 1.16 Considerando a função $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x \in (0, 1]$. Temos

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx &= \lim_{t \to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{t \to 0^+} 2\sqrt{x}\Big|_t^1 \\ &= \lim_{t \to 0^+} (2 - 2\sqrt{t}) = 2, \end{aligned}$$

ou seja, a integral imprópria $\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ é convergente.

Exemplo 1.17 Considere a função $f(x) = \ln(x)$, com $x \in (0, 1]$. Temos,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln(x)\, dx &= \lim_{t \to 0^+} \int_t^1 \ln(x)\, dx = \lim_{t \to 0^+} (x \ln(x) - x)\Big|_t^1 \\ &= \lim_{t \to 0^+} (t - t\ln(t) - 1) = -1, \end{aligned}$$

(pois $\lim\limits_{t\to 0^+} t\ln(t) = 0$) ou seja, a integral imprópria $\int_0^1 x\ln(x)\,dx$ é convergente.

Definição 1.18 (a) Seja f uma função não limitada em $[a,b)$ e integrável em $[a,t]$ para todo $a < t < b$. A integral imprópria de f em $[a,b)$ é definido por

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx.$$

Se o limite existire for finito, dizemos que a integral imprópria é convergente. Caso contrário, divergente.

(b) Seja f uma função não limitada em $[a,p)$ e $(p,b]$. Se as duas integrais impróprias $\int_a^p f(x)\,dx$ e $\int_p^b f(x)\,dx$ são convergentes, então definimos a integral imprópria de f em $[a,b]$ como

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^p f(x)\,dx + \int_p^b f(x)\,dx.$$

Exemplo 1.19 Considere a função $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$. Temos

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx &= \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx = \lim_{t\to 1^-} \frac{3}{2}(x-1)^{2/3}\Big|_0^t \\
&= \lim_{t\to 1^-} \left(\frac{3}{2}(t-1)^{2/3} - \frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

De modo análogo, temos que $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx = \lim\limits_{t\to 1^+} \int_t^3 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx = \frac{3}{2}\sqrt[3]{4}$. Portanto,

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx + \int_1^3 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx = \frac{3}{2}(\sqrt[3]{4}-1).$$

Exemplo 1.20 Considere a integral imprópria

$$\int_0^{2/\pi} \Big(2x\,\mathrm{sen}(1/x) - \cos(1/x)\Big)\,dx.$$

Temos,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2/\pi} \Big(2x\,\mathrm{sen}(1/x) - \cos(1/x)\Big)\,dx \\
&= \lim_{t\to 0^+} \int_t^{2/\pi} \Big(2x\,\mathrm{sen}(1/x) - \cos(1/x)\Big)\,dx \\
&= \lim_{t\to 0^+} \left(x^2\,\mathrm{sen}(1/x)\Big|_t^{2/\pi} \right) \\
&= \lim_{t\to 0^+} \left(\frac{4}{\pi^2} - t^2\,\mathrm{sen}(1/t) \right) = \frac{4}{\pi^2},
\end{aligned}$$

pois $\lim\limits_{t\to 0^+} t^2 \operatorname{sen}(1/t) = 0$. De modo análogo, obtemos que

$$\int_{-2/\pi}^{0} \Big(2x \operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x)\Big)\, dx = \frac{4}{\pi^2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
&\int_{-2/\pi}^{2/\pi} \left(2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) dx \\
&= \int_{-2/\pi}^{0} \left(2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) dx \\
&+ \int_{0}^{2/\pi} \left(2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) dx \\
&= \frac{4}{\pi^2} + \frac{4}{\pi^2} = \frac{8}{\pi^2}.
\end{aligned}$$

Exemplo 1.21 A função $f(x) = (1-x)^{-p}$ é localmente integrável em $[0, 1)$.

(a) Para $p \neq 1$ temos

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^p}\, dx &= \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{1}{(1-x)^p}\, dx \\
&= \lim_{t\to 1^-} \left(\frac{(1-x)^{-p+1}}{p-1} \Bigg|_0^t \right) \\
&= \lim_{t\to 1^-} \frac{(1-t)^{1-p} - 1}{p-1} = \begin{cases} 1/(1-p), & \text{se } \ p < 1, \\ \infty, & \text{se } \ p > 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

(b) Para $p = 1$, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{1-x}\, dx &= \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{1}{1-x}\, dx \\
&= \lim_{t\to 1^-} -\ln(1-x)\Big|_0^t \\
&= \lim_{t\to 1^-} -\ln(1-t) = \infty.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^p}\, dx = \begin{cases} 1/(1-p), & \text{se } \ p < 1 \text{ (convergente)}, \\ \infty, & \text{se } \ p \geq 1 \text{ (divergente)}. \end{cases}$$

Exemplo 1.22 Vamos determinar para que valores de p a integral imprópria

$$\int_0^{2/\pi} \Big(p\, x^{p-1}\cos(1/x) + x^{p-2}\mathrm{sen}(1/x) \Big)\, dx$$

é convergente. Temos,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2/\pi} \Big(p\, x^{p-1}\cos(1/x) + x^{p-2}\mathrm{sen}(1/x) \Big)\, dx \\
&= \lim_{t\to 0^+} \int_t^{2/\pi} \frac{d}{dx}\Big(x^p \cos(1/x) \Big)\, dx \\
&= \lim_{t\to 0^+} x^p \cos(1/x)\Big|_t^{2/\pi} \\
&= \lim_{t\to 0^+} -\, t^p \cos(1/t).
\end{aligned}$$

Para $p > 0$ temos que $\lim\limits_{t\to 0^+} t^p \cos(1/t) = 0$. Já para valores $p \leq 0$, o limite $\lim\limits_{t\to 0^+} t^p \cos(1/t)$ não existe. Portanto, a integral imprópria é convergente se $p > 0$ e divergente se $p \leq 0$.

Observação 1.23 (a) Na Definição 1.18 (b), se as duas integrais impróprias $\displaystyle\int_a^p f(x)\, dx$ e $\displaystyle\int_p^b f(x)\, dx$ existem, então definimos a integral imprópria de f sobre $[a, b]$ como a soma

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^p f(x)\, dx + \int_p^b f(x)\, dx,$$

ou com a notação de limite

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{p-\varepsilon} f(x)\, dx + \lim_{\delta\to 0^+} \int_{p+\delta}^b f(x)\, dx. \tag{1.1}$$

Se esses dois limites existem, então também existe o limite

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\int_a^{p-\varepsilon} f(x)\, dx + \int_{p+\varepsilon}^b f(x)\, dx \right) \tag{1.2}$$

e tem o mesmo valor. Entretanto, a existência do limite (2) não implica a existência de (1). Por exemplo, considerando a função $f(x) = 1/x^3$ (e $0 < \varepsilon < 1$), temos

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x^3}\, dx + \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^3}\, dx \right) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\varepsilon^2} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\varepsilon^2} \right) \right] = 0,$$

mas as integrais impróprias $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{x^3}\, dx$ e $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^3}\, dx$ não existem (são divergentes).

Definimos a integral imprópria de f (também chamada integral de Cauchy) como a integral dada por (1). O limite (2)(quando existe) é chamado valor principal de Cauchy da integral e denotado por $v.p.c. \int_a^b f(x)\,dx$.

Generalizando, uma função que tenha um número finito de pontos onde não é definida ou não limitada pode ser tratada subdividindo-se o intervalo em subintervalos com esses extremos.

(b) Considere agora a integral imprópria sobre $(-\infty, \infty)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to -\infty} \int_b^0 f(x)\,dx + \lim_{c\to\infty} \int_0^c f(x)\,dx. \tag{1.3}$$

A existência do limite

$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(x)\,dx \tag{1.4}$$

não implica que a integral imprópria $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ seja convergente. Por exemplo, $\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} x\,dx = 0$, mas $\int_0^{\infty} x\,dx$ e $\int_{-\infty}^{0} x\,dx$ são divergentes. O limite (4), quando existe, é chamado valor principal de Cauchy da integral imprópria sobre $\mathbb{R}$ e denotado por $v.p.c. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$.

2 Integrais Impróprias de Funções Não Negativas

Nesta seção vamos estudar as integrais impróprias de funções não negativas. Apresentaremos alguns testes para garantir que uma integral imprópria é convergente ou divergente.

Teorema 2.1 *Seja $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função localmente integrável e suponha que $f(x) \geq 0$. Então a integral imprópria $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ é convergente se, e somente se, função $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ é limitada.*

Demonstração Como $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, \infty)$, temos que F é uma função monótona não decrescente em $[a,\infty)$. Portanto, a existência do limite $\lim_{x\to\infty} F(x)$ equivale ao conjunto $\left\{ \int_a^c f(t)\,dt :\ c \geq a \right\}$ ser limitado. $\square$

Teorema 2.2 (Critério da Comparação) *Sejam f e g duas funções localmente integráveis em $[a,\infty)$ e satisfazendo $0 \leq f(x) \leq g(x)$.*

(i) Se $\int_a^\infty g(x)\,dx$ é convergente, então $\int_a^\infty f(x)\,dx$ é convergente.

(ii) Se $\int_a^\infty f(x)\,dx$ é divergente, então $\int_a^\infty g(x)\,dx$ é divergente.

Demonstração (i) Temos que $\int_a^\infty g(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t g(x)\,dx = M < \infty$.

Como $0 \leq f(x) \leq g(x)$, obtemos que, para todo $a < t < \infty$,

$$\int_a^t f(x)\,dx \leq \int_a^t g(x)\,dx \leq \int_0^\infty g(x)\,dx = M.$$

Como a função $F(t) = \int_a^t f(x)\,dx$ é não decrescente e limitada ($0 \leq F(t) \leq M$), resulta que o limite $\lim_{t\to\infty} F(t) = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$ existe e é finito. Portanto, a integral imprópria $\int_a^\infty f(x)\,dx$ é convergente. $\square$

Observação 2.3 O Critério da Comparação é válido para qualquer tipo de integral imprópria. Ele é útil se o integrando da integral imprópria é complicado mas pode ser comparado com uma função que é mais fácil de ser integrável.

Exemplo 2.4 Considere as funções $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\cos^2(x)$ e $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$ em $[0,\infty)$. Temos que

$$0 \leq \mathrm{e}^{-x}\cos^2(x) \leq \mathrm{e}^{-x}.$$

Além disso, também temos que $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,dx = 1$, ou seja, convergente. Portanto, pelo Teorema 2.2, a integral $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\cos^2(x)\,dx$ é convergente.

Exemplo 2.5 Considere a integral imprópria $\int_0^1 \frac{2+\cos(\pi x)}{(1-x)^p}\,dx$.

(i) Para $p < 1$ e $0 \leq x < 1$, temos

$$0 < \frac{2+\cos(\pi x)}{(1-x)^p} \leq \frac{3}{(1-x)^p}.$$

Pelo Exemplo 1.21, temos que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^p}\,dx$ é convergente se $p < 1$. Portanto, aplicando o Teorema 2.2, obtemos que $\displaystyle\int_0^1 \frac{2+\cos(\pi x)}{(1-x)^p}\,dx$ é convergente (se $p < 1$).

(ii) Para $p \geq 1$, temos

$$0 < \frac{1}{(1-x)^p} \leq \frac{2+\cos(\pi x)}{(1-x)^p},$$

e como $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^p}\,dx$ é divergente (se $p \geq 1$), então a integral imprópria

$$\int_0^1 \frac{2+\cos(\pi x)}{(1-x)^p}\,dx$$

é divergente se $p \geq 1$.

Observação 2.6 Seja $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ uma função localmente integável. Então se $a < a_1 < c < \infty$ temos

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^{a_1} f(x)\,dx + \int_{a_1}^c f(x)\,dx.$$

Como $\displaystyle\int_a^{a_1} f(x)\,dx$ é uma integral definida, fazendo $c \to \infty$, concluímos que se uma das integrais impróprias $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ ou $\displaystyle\int_{a_1}^\infty f(x)\,dx$ for convergente, então a outra também será convergente, e neste caso

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_a^{a_1} f(x)\,dx + \int_{a_1}^\infty f(x)\,dx.$$

Isto significa que todo teorema envolvendo convergência ou divergência de integral imprópria $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ no sentido da Definição 1.3 continua válido se as hipóteses são satisfeitas em um subintervalo $[a_1,\infty)$ de $[a,\infty)$. Por exemplo, o Teorema 2.2 continua válido se $0 \leq f(x) \leq g(x)$ em $a_1 \leq x < \infty$, onde a_1 é algum ponto em $[a,\infty)$. Com isso, se $f(x) \geq 0$ para algum intervalo $[a_1,\infty)$ de $[a,\infty)$, mas não necessáriamente para todo $x \in [a,\infty)$, continuaremos a usar a convenção introduzida para funções não negativas, isto é, escrevemos $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx < \infty$ se a integral imprópria converge. A mesma observação é válida para qualquer tipo de integral imprópria.

Exemplo 2.7 Considere, para $p \geq 0$, a função

$$f(x) = \frac{(x-1)^p(2+\text{sen}(x))}{(x-1/3)^{2p}}.$$

Para x suficientemente grande temos que

$$\frac{1}{2\,x^p} \leq \frac{(x-1)^p(2+\text{sen}(x))}{(x-1/3)^{2p}} \leq \frac{4}{x^p}.$$

De fato, para $x > 1$ temos

(a) $0 < x^p f(x) = x^p\,\dfrac{(x-1)^p(2+\text{sen}(x))}{(x-1/3)^{2p}} \leq 3x^p\,\dfrac{(x-1)^p}{(x-1/3)^{2p}} = g(x)$.
Temos que $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 3$. Logo, para todo $\varepsilon > 0$ existe $M_1 > 0$ tal que se $x > M_1$ implica $|g(x)-3| \leq \varepsilon$ (ou seja, $3-\varepsilon \leq g(x) \leq 3+\varepsilon$). Em particular, para $\varepsilon = 1$ existe $M_1 > 0$ tal que $x^p\, f(x) \leq g(x) \leq 4$, ou seja, $f(x) \leq \dfrac{4}{x^p}$, para $x > M_1$.

(b) Também temos $x^p f(x) = x^p\,\dfrac{(x-1)^p(2+\text{sen}(x))}{(x-1/3)^{2p}} \geq x^p\,\dfrac{(x-1)^p}{(x-1/3)^{2p}} = h(x)$. Como $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = 1$, dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe $M_2 > 0$ tal que se $x > M_2$ temos $|h(x)-1| \leq \varepsilon$. Em particular, para $\varepsilon = 1/2$ existe $M_2 > 0$ tal que $h(x) \geq 1/2$. Logo, $x^p f(x) \geq h(x) \geq 1/2$, ou seja, $f(x) \geq \dfrac{1}{2x^p}$, para $x > M_2$. Com isso, escolhendo $M = \max\{M_1, M_2\}$, temos para $x > M$

$$\frac{1}{2\,x^p} \leq \frac{(x-1)^p(2+\text{sen}(x))}{(x-1/3)^{2p}} \leq \frac{4}{x^p}.$$

Portanto, usando o Teste da Comparação e o Exemplo 1.12, temos que a integral imprópria

$$\int_1^\infty \frac{(x-1)^p(2+\text{sen}(x))}{(x-1/3)^{2p}}\,dx$$

é convergente se $p > 1$ e divergente se $p \leq 1$.

Exemplo 2.8 Considere a integral imprópria $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln(x)+\text{sen}(x)}{\sqrt{x}}\,dx$. Observe que, para $x > \mathrm{e}^2$,

$$\frac{\ln(x)+\text{sen}(x)}{\sqrt{x}} \geq \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Como

$$\begin{aligned}
\int_{e^2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx &= \lim_{t\to\infty}\int_{e^2}^{t} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \\
&= \lim_{t\to\infty} 2\sqrt{x}\Big|_{e^2}^{t} \\
&= \lim_{t\to\infty}(2\sqrt{x} - 2\,e) = \infty,
\end{aligned}$$

então, pelo Teste da Comparação, $\displaystyle\int_{e^2}^{\infty} \frac{\ln(x)+\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{x}}\,dx$ é divergente. Portanto, a integral imprópria $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{\ln(x)+\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{x}}\,dx$ é divergente.

Exemplo 2.9 Vamos estudar a integral imprópria $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{4+\cos(x)}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx$. Considere as integrais impróprias

$$I_1 = \int_0^1 \frac{4+\cos(x)}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx \;\text{ e }\; I_2 = \int_1^{\infty} \frac{4+\cos(x)}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx.$$

(i) Para $0 < x < 1$, temos $0 < \dfrac{4+\cos(x)}{(1+x)\sqrt{x}} < \dfrac{5}{\sqrt{x}}$, e como a integral imprópria $\displaystyle\int_0^1 \frac{5}{\sqrt{x}}\,dx$ é convergente, então I_1 é convergente.

(ii) Para $x > 1$, temos $0 < \dfrac{4+\cos(x)}{(1+x)\sqrt{x}} < \dfrac{5}{x^{3/2}}$. Como a integral imprópria $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{5}{x^{3/2}}\,dx$ é convergente, então I_2 é convergente.

Portanto, $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{4+\cos(x)}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx = I_1 + I_2$ é convergente.

Teorema 2.10 (Teste Limite da Comparação) *Suponha que as funções f e g são localmente integráveis em $[a,b)$ (com $b < \infty$ ou $b = \infty$), $f(x) \geq 0$, $g(x) > 0$ e que*

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = M \;\left(ou \;\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = M,\; hboxse\; b = \infty \right). \tag{2.5}$$

(i) Se $0 < M < \infty$, então $\int_a^b f(x)\,dx$ e $\int_a^b g(x)\,dx$ são ambas convergente ou ambas divergentes.

(ii) Se $M = \infty$ e $\int_a^b g(x)\,dx = \infty$, então $\int_a^b f(x)\,dx = \infty$.

(iii) Se $M = 0$ e $\int_a^b g(x)\,dx$ é convergente, então $\int_a^b f(x)\,dx$ é convergente.

Demonstração (i) Por (5) (usando a definição de limite) existe $a_1 \in [a, b)$ tal que

$$0 < \frac{M}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3M}{2}, \text{ se } a_1 \leq x < b,$$

e portanto, para $a_1 \leq x <, b$, temos

$$\frac{M}{2} g(x) < f(x) < \frac{3}{2} M g(x). \tag{2.6}$$

Se a integral imprópria de g em $[a, b)$ é convergente e como $g(x) > 0$, então

$$\int_{a_1}^{b} g(x)\, dx \leq \int_{a}^{b} g(x)\, dx < \infty.$$

Logo, usando (6), obtemos $\int_{a_1}^{b} f(x)\, dx < \infty$. Com isso, usando que f é localmente integrável, obtemos

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = \int_{a}^{a_1} f(x)\, dx + \int_{a_1}^{\infty} f(x)\, dx < \infty.$$

Agora se $\int_{a_1}^{b} g(x)\, dx$ é divergente, por (6) ($\frac{M}{2} g(x) < f(x)$) e pelo Critério da Comparação, obtemos que $\int_{a_1}^{b} f(x)\, dx$ também é divergente. Logo, $\int_{a}^{b} f(x)\, dx$ é divergente.

(ii) Se $M = \infty$, existe $a_2 \in [a, b)$ tal que $f(x) \geq g(x)$ se $x \in [a_2, b)$. Logo, pelo Critério da Comparação, se $\int_{a}^{b} g(x)\, dx = \infty$, então $\int_{a}^{b} f(x)\, dx = \infty$.

(iii) Se $M = 0$, então existe $a_3 \in [a, b)$ tal que $f(x) \leq g(x)$ se $x \in [a_3, b)$. Usando o Critério da Comparação, se $\int_{a_3}^{b} g(x)\, dx$ é convergente, então $\int_{a_3}^{b} f(x)\, dx$ é convergente. Portanto,

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = \int_{a}^{a_3} f(x)\, dx + \int_{a_3}^{b} f(x)\, dx < \infty.$$

$\square$

Exemplo 2.11 Vamos determinar para que valores de $p \in \mathbb{R}$ a integral imprópria

$$\int_{0}^{\pi/2} \frac{\text{sen}(x)}{x^p}\, dx$$

é convergente usando o Teorema 2.10. Considere as funções

$$f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x^p} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{1}{x^{p-1}}.$$

Temos que $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\text{sen}(x)}{x} = 1$. Além disso,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} g(x)\,dx &= \lim_{t\to 0^+}\int_t^{\pi/2}\frac{1}{x^{p-1}}\,dx = \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{x^{2-p}}{2-p}\Big|_t^{\pi/2}\right)\\ &= \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{2-p}\left((\pi/2)^{2-p} - t^{2-p}\right) = \frac{1}{2-p}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2-p},\end{aligned}$$

se $p < 2$. Portanto, pelo Teste Limite da Comparação, a integral imprópria $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\text{sen}(x)}{x^p}\,dx$ é convergente se $p < 2$.

Exemplo 2.12 A função $f(x) = \dfrac{1}{x^p(1+x)^q}$ é localmente integrável em $(0,\infty)$ com $p, q \in \mathbb{R}$. Considere a integral imprópria $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{x^p(1+x)^q}\,dx$. Para verificar para quais valores de p e q a integral imprópria é convergente, considere as seguintes integrais impróprias

$$J_1 = \int_0^1 \frac{1}{x^p(1+x)^q}\,dx \quad \text{e} \quad J_2 = \int_1^{\infty}\frac{1}{x^p(1+x)^q}\,dx.$$

(i) Analisando a integral imprópria J_1. Considere $g(x) = \dfrac{1}{x^p}$. Temos,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{(1+x)^q} = 1.$$

Como,

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} 1/(1-p), & \text{se } p < 1 \\ \infty, & \text{se } p \geq 1 \end{cases}$$

então, aplicando o Teorema 2.10, temos que $J_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p(1+x)^q}\,dx$ é convergente se $p < 1$ (para qualquer valor de q).

(ii) Analisando a integral imprópria $J_2 = \displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p(1+x)^q}\,dx$. Considerando agora a função $h(x) = \dfrac{1}{x^{p+q}}$, temos

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^q}{(1+x)^q} = 1.$$

Como

$$\int_1^{\infty} h(x)\,dx = \int_1^{\infty}\frac{1}{x^{p+q}}\,dx = \begin{cases} 1/(p+q-1), & \text{se } p+q > 1 \\ \infty, & \text{se } p+q \leq 1 \end{cases}$$

então, aplicando o Teorema 2.10, $J_2 = \int_1^\infty \frac{1}{x^p(1+x)^q}\,dx$ é convergente se $p+q>1$.

Portanto, combinando (i) e (ii), obtemos que $\int_0^\infty \frac{1}{x^p(1+x)^q}\,dx$ é convergente se $p<1$ e $p+q>1$. Por exemplo,

$$(a)\ \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)^2}\,dx \ \ (\text{ com } \ p=1/2 \text{ e } q=2),$$
$$(b)\ \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x)^5}\,dx \ \ (\text{ com } \ p=1/3 \text{ e } q=5),$$
$$(c)\ \int_0^\infty \frac{x^5}{(1+x)^8}\,dx \ \ (\text{ com } \ p=-5 \text{ e } q=8),$$

são integrais impróprias convergentes.

Exemplo 2.13 Considere a integral imprópria $\int_1^\infty \frac{(x-\operatorname{sen}(x))^6}{x^8}\,dx$, com $f(x) = \frac{(x-\operatorname{sen}(x))^6}{x^8}$. Usando a função $g(x)=1/x^2$, temos

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{(x-\operatorname{sen}(x))^6}{x^6} = 0.$$

Como a integral imprópria $\int_1^\infty g(x)\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ é convergente, então pelo Teorema 2.10(iii), temos que $\int_1^\infty \frac{(x-\operatorname{sen}(x))^6}{x^8}\,dx$ é convergente.

3 Funções Absolutamente Integráveis

O Critério da Comparação (Teorema 2.2) e o Teste Limite da Comparação (Teorema 2.10) podem ser usados para o estudo da convergência ou divergência de integrais impróprias de funções não negativas. Nesta seção, vamos apresentar critérios para o estudo de integrais impróprias de funções que mudam de sinal no intervalo de integração.

Definição 3.1 Dizemos que uma função $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ é absolutamente integrável em $[a,\infty)$ se f é localmente integrável em $[0,\infty)$ e $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ é convergente. Neste caso, também dizemos que a integral imprópria $\int_a^\infty f(x)\,dx$ é absolutamente convergente

Teorema 3.2 *Se f é uma função absolutamente integrável em $[a,\infty)$, então $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ é convergente.*

Demonstração Temos que

$$0 \leq |f(x)| + f(x) \leq 2\,|f(x)|.$$

Como $\int_a^{\infty} |f(x)|\,dx$ é convergente, podemos usar o Critério da Comparação (Teorema 2.2), para concluir que a integral imprópria $\int_0^{\infty} (|f(x)| + f(x))\,dx$ é convergente. Podemos escrever, para todo $a < t < \infty$,

$$\int_a^t f(x)\,dx = \int_a^t (|f(x)| + f(x))\,dx - \int_a^t |f(x)|\,dx.$$

Como as integrais impróprias $\int_0^{\infty} (|f(x)| + f(x))\,dx$ e $\int_0^{\infty} |f(x)|\,dx$ são convergentes, então $\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ também é convergente. □

Exemplo 3.3 Considere a integral imprópria $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\cos^3(x)\,dx$. Observe que

$$0 \leq |\,\mathrm{e}^{-x}\cos^3(x)| \leq \mathrm{e}^{-x}.$$

Como $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\,dx$ é convergente, então $\int_0^{\infty} |\,\mathrm{e}^{-x}\cos^3(x)\,|\,dx$ é convergente (pelo Critério da Comparação). Portanto, $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\cos^3(x)\,dx$ é (absolutamente) convergente.

Exemplo 3.4 A recíproca do Teorema 3.2 não é verdadeira. Vamos verificar que a integral imprópria $\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{sen}(x)}{x}\,dx$ é convergente e que a integral imprópria $\int_1^{\infty} \left|\frac{\mathrm{sen}(x)}{x}\right|\,dx$ é divergente.

(i) Usando integração por partes, obtemos

$$\int_1^t \frac{1}{x}\,\mathrm{sen}(x)\,dx = -\frac{\cos(t)}{t} + \cos(1) - \int_1^t \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx.$$

Para $x \geq 1$, temos $0 \leq \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ e $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ é convergente. Logo, a integral imprópria

$\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ é (absolutamente) convergente. Além disso, também temos

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\cos(t)}{t} = 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx &= \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx \\
&= \lim_{t\to\infty} \left(-\frac{\cos(t)}{t} + \cos(1) - \int_1^t \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx \right) \\
&= \cos(1) - \int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx < \infty.
\end{aligned}$$

(ii) Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos que $|\operatorname{sen}(x)| \le 1$. Logo, $\operatorname{sen}^2(x) \le |\operatorname{sen}(x)|$. Para $x \ge 1$ obtemos

$$\left| \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \right| \ge \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x}.$$

Usando integração por partes, obtemos

$$\int_1^t \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x}\,dx = -\frac{\operatorname{sen}(2t)}{4t} + \frac{\operatorname{sen}(2)}{4} + \int_1^t \left(\frac{1}{2x} - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4x^2} \right) dx.$$

Usando que a integral imprópria $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4x^2}\,dx$ é (absolutamente) convergente,

$$\int_1^\infty \frac{1}{2x}\,dx = \infty$$

e $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(2t)}{4t} = 0$, obtemos que

$$\lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x}\,dx = \infty.$$

Logo, pelo Critério da Comparação, $\displaystyle\int_1^\infty \left| \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \right| dx$ é divergente. Temos

$$\int_1^\infty \left| \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \right| dx = \int_1^\infty \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x}\,dx \ge \int_1^\infty \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x}\,dx = \infty,$$

ou seja, $\displaystyle\int_1^\infty \left| \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \right| dx = \infty.$

Exemplo 3.5 Considere a integral imprópria $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-x}\operatorname{sen}^3(x)}{x^2}\,dx$. Temos que, para $x \ge 1$,

$$0 \le \left| \frac{e^{-x}\operatorname{sen}^3(x)}{x^2} \right| \le \frac{1}{x^2}.$$

Como $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 1$ (ou seja, convergente) então $\displaystyle\int_1^\infty \left|\frac{e^{-x}\mathrm{sen}^3(x)}{x^2}\right| dx$ é convergente. Portanto, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-x}\mathrm{sen}^3(x)}{x^2}\,dx$ é absolutamente convergente (e então, convergente).

Teorema 3.6 (Teste de Dirichlet) *Seja $h(x) = f(x)g(x)$ e suponha que*

(i) a função f é contínua e $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ é limitada em $[a,b)$ (com $b < \infty$ ou $b = \infty$);

(ii) a função $g : [a,b) \to \mathbb{R}$ é derivável com g' absolutamente integrável (ou seja, $\displaystyle\int_a^b |g'(x)|\,dx < \infty$) e $\displaystyle\lim_{x\to b^-} g(x) = 0$ (ou $\displaystyle\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ se $b = \infty$).

Então, a integral imprópria $\displaystyle\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$ é convergente.

Demonstração Como a função $h(x) = f(x)\,g(x)$ é contínua em $[a,b)$, então também é localmente integrável em $[a,b)$. Lembrando que se $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ então $F'(x) = f(x)$. Para $a \le t < b$, usando integração por partes, obtemos

$$\int_a^t f(x)\,g(x)\,dx = F(t)\,g(t) - \int_a^t F(x)\,g'(x)\,dx.$$

Usando que F é limitada (ou seja, $|F(x)| \le C$ para todo $x \in [a,b)$) e que g' é absolutamente integrável, pelo Critério da Comparação, temos que

$$\int_a^b |F(x)\,g'(x)|\,dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t |F(x)\,g'(x)|\,dx < \infty,$$

pois $\displaystyle\int_a^t |F(x)\,g'(x)|dx \le C\int_a^t |g'(x)|\,dx$.

Além disso, como $\displaystyle\lim_{t\to b^-} F(t)\,g(t) = 0$ (pois F é limitada e $\displaystyle\lim_{t\to b^-} g(t) = 0$), obtemos

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx &= \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,g(x)\,dx\\ &= \lim_{t\to b^-}\left(F(t)g(t) - \int_a^t F(x)g'(x)\,dx\right)\\ &= -\int_a^b F(x)\,g'(x)\,dx < \infty.\end{aligned}$$

Exemplo 3.7 Considere a integral imprópria $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{sen}(x)}{x^p}\,dx$, com $0 < p \le 1$. Usando o Teste de Dirichlet com $f(x) = \mathrm{sen}(x)$ e $g(x) = \dfrac{1}{x^p}$, temos que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{sen}(x)}{x^p}\,dx$ é convergente (com $0 < p \le 1$).

Exemplo 3.8 Considere a integral imprópria $\int_0^\infty \operatorname{sen}(x^2)\,dx$ (chamada de integral de Fresnel). Observe que $\int_0^1 \operatorname{sen}(x^2)\,dx$ é finita (pois $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ é contínua). Para $c > 1$, aplicando o Teorema de Mudança de Variável (com $t = x^2$), obtemos

$$\int_1^c \operatorname{sen}(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_1^{c^2} \frac{\operatorname{sen}(t)}{\sqrt{t}}\,dt.$$

Pelo Exemplo 3.7 (com $p = 1/2$) temos que $\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen}(t)}{\sqrt{t}}\,dt$ é convergente. Com isso,

$$\int_1^\infty \operatorname{sen}(x^2)\,dx = \int_1^\infty \frac{\operatorname{sen}(t)}{\sqrt{t}}\,dt$$

é convergente. Portanto,

$$\int_0^\infty \operatorname{sen}(x^2)\,dx = \int_0^1 \operatorname{sen}(x^2)\,dx + \int_1^\infty \operatorname{sen}(x^2)\,dx < \infty,$$

ou seja, convergente.

Exemplo 3.9 O teste de Dirichlet também pode ser usado para verificar que certas integrais impróprias são divergentes. Por exemplo, a integral imprópria $\int_1^\infty x^p \operatorname{sen}(x)\,dx$ é divergente se $p > 0$. De fato, suponha que essa integral imprópria seja convergente para algum $p > 0$. Então, a função definida por $F(x) = \int_1^x t^p \operatorname{sen}(t)\,dt$ seria limitada em $[1, \infty)$, e usando $f(x) = x^p \operatorname{sen}(x)$ e $g(x) = 1/x^p$ no Teorema 3.6 concluiriamos que $\int_1^\infty \operatorname{sen}(x)\,dx$ também é convergente. Mas $\int_1^\infty \operatorname{sen}(x)\,dx$ é divergente. Portanto, $\int_1^\infty x^p \operatorname{sen}(x)\,dx$ é divergente se $p > 0$.

4 Mais alguns exemplos

Exemplo 4.1 Considere a integral imprópria $\int_0^\infty e^{-x}\operatorname{sen}(x)\,dx$. Usando integração por partes obtemos

$$\int e^{-x}\operatorname{sen}(x)\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x}(\operatorname{sen}(x) + \cos(x)).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{sen}(x)\,dx &= \lim_{t\to\infty}\int_0^t \mathrm{e}^{-x}\mathrm{sen}(x)\,dx \\
&= \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}(\mathrm{sen}(x)+\cos(x))\Big|_0^t\right) \\
&= \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}(\mathrm{sen}(t)+\cos(t))+\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

pois $\lim\limits_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-t}=0$ e $|\mathrm{sen}(t)+\cos(t)|\leq 2$.

Portanto, a integral imprópria $\displaystyle\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{sen}(x)\,dx$ é convergente.

Exemplo 4.2 Vamos determinar para quais valores de $p\in\mathbb{R}$ a integral imprópria

$$\int_{2\pi}^{\infty}\left(p\,x^{p-1}\cos\Big(\frac{1}{x}\Big)+x^{p-2}\mathrm{sen}\Big(\frac{1}{x}\Big)\right)dx$$

é convergente.

Temos que

$$\begin{aligned}
&\int_{2\pi}^{\infty}\left(p\,x^{p-1}\cos\Big(\frac{1}{x}\Big)+x^{p-2}\mathrm{sen}\Big(\frac{1}{x}\Big)\right)dx \\
&= \lim_{t\to\infty}\int_{2\pi}^{t}\frac{d}{dx}\left(x^p\cos\Big(\frac{1}{x}\Big)\right)dx \\
&= \lim_{t\to\infty}\left(x^p\cos\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big|_{2\pi}^{t}\right) \\
&= \lim_{t\to\infty}\left(t^p\cos\Big(\frac{1}{t}\Big)-(2\pi)^p\cos\Big(\frac{1}{2\pi}\Big)\right).
\end{aligned}$$

Como o limite $\lim\limits_{t\to\infty}t^p\cos(1/t)$ existe e é finito se $p\leq 0$, obtemos que a integral imprópria $\displaystyle\int_{2\pi}^{\infty}\left(p\,x^{p-1}\cos\Big(\frac{1}{x}\Big)+x^{p-2}\mathrm{sen}\Big(\frac{1}{x}\Big)\right)dx$ é convergente se $p\leq 0$ (e divergente se $p>0$).

Exemplo 4.3 Vamos determinar se a integral imprópria

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^2+3)^{3/2}}{(x^4+1)^{3/2}}\,\mathrm{sen}^2(x)\,dx$$

é convergente ou divergente.

Vamos estudar as duas integrais impróprias

$$\int_0^\infty \frac{(x^2+3)^{3/2}}{(x^4+1)^{3/2}}\,\mathrm{sen}^2(x)\,dx \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^0 \frac{(x^2+3)^{3/2}}{(x^4+1)^{3/2}}\,\mathrm{sen}^2(x)\,dx.$$

Se essas duas integrais impróprias forem convergentes, então podemos escrever

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty \frac{(x^2+3)^{3/2}}{(x^4+1)^{3/2}}\,\mathrm{sen}^2(x)\,dx &= \int_{-\infty}^0 \frac{(x^2+3)^{3/2}}{(x^4+1)^{3/2}}\,\mathrm{sen}^2(x)\,dx \\ &+ \int_0^\infty \frac{(x^2+3)^{3/2}}{(x^4+1)^{3/2}}\,\mathrm{sen}^2(x)\,dx.\end{aligned}$$

(a) Temos que a intergral $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{(x^2+3)^{3/2}}{(x^4+1)^{3/2}}\,\mathrm{sen}^2(x)\,dx$ existe (é finita) pois a função $f(x) = \dfrac{(x^2+3)^{3/2}}{(x^4+1)^{3/2}}\,\mathrm{sen}^2(x)$ é contínua em $[0,\sqrt{3}]$. Para $x \geq \sqrt{3}$ temos que $x^2 + 3 \leq x^2 + x^2 = 2x^2$ e $x^4 + 1 \geq x^4$. Logo,

$$0 \leq \frac{(x^2+3)^{3/2}}{(x^4+1)^{3/2}}\,\mathrm{sen}^2(x) \leq \frac{(2x^2)^{3/2}}{(x^4)^{3/2}} = \frac{2\sqrt{2}}{x^3}.$$

Como a integral imprópria $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$ é convergente, estão aplicando o Critério da Comparação, temos que $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^\infty \frac{(x^2+3)^{3/2}}{(x^4+1)^{3/2}}\,\mathrm{sen}^2(x)\,dx$ é convergente. Portanto, podemos escrever

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{(x^2+3)^{3/2}}{(x^4+1)^{3/2}}\,\mathrm{sen}^2(x)\,dx = &\int_0^{\sqrt{3}} \frac{(x^2+3)^{3/2}}{(x^4+1)^{3/2}}\,\mathrm{sen}^2(x)\,dx \\ &+ \int_{\sqrt{3}}^\infty \frac{(x^2+3)^{3/2}}{(x^4+1)^{3/2}}\,\mathrm{sen}^2(x)\,dx < \infty,\end{aligned}$$

ou seja, é convergente

(b) Como $f(x) = \dfrac{(x^2+3)^{3/2}}{(x^4+1)^{3/2}}\,\mathrm{sen}^2(x)$ é uma função par ($f(-x) = f(x)$), então

$$\int_{-\infty}^0 \frac{(x^2+3)^{3/2}}{(x^4+1)^{3/2}}\,\mathrm{sen}^2(x)\,dx = \int_0^\infty \frac{(x^2+3)^{3/2}}{(x^4+1)^{3/2}}\,\mathrm{sen}^2(x)\,dx.$$

Portanto, a integral imprópria

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty \frac{(x^2+3)^{3/2}}{(x^4+1)^{3/2}}\,\mathrm{sen}^2(x)\,dx = &\int_{-\infty}^0 \frac{(x^2+3)^{3/2}}{(x^4+1)^{3/2}}\,\mathrm{sen}^2(x)\,dx \\ &+ \int_0^\infty \frac{(x^2+3)^{3/2}}{(x^4+1)^{3/2}}\,\mathrm{sen}^2(x)\,dx\end{aligned}$$

é convergente.

Exemplo 4.4 Vamos determinar condições sobre $p, q \in \mathbb{R}$ para que a integral imprópria $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p}{(1+x^2)^q}\,dx$ seja convergente.

Vamos analisar as integrais impróprias $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^p}{(1+x^2)^q}\,dx$ e $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^p}{(1+x^2)^q}\,dx$.

(a) Se $0 < x \leq 1$, então aplicando o Teste Limite da Comparação com

$f(x) = \dfrac{x^p}{(1+x^2)^q}$ e $g(x) = x^p$, obtemos

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{(1+x^2)^q} = 1.$$

Como $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 x^p\,dx$ é convergente se $p > -1$, então a integral imprópria

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x^p}{(1+x^2)^q}\,dx$$

e convergente se $p > -1$ (para qualquer valor de q).

(b) Para $x \geq 1$, temos que $(1+x^2)^q \geq x^{2q}$. Logo,

$$0 < \frac{x^p}{(1+x^2)^q} \leq \frac{x^p}{x^{2q}} = x^{p-2q}.$$

Como a integral imprópria $\displaystyle\int_1^\infty x^{p-2q}\,dx$ é convergente se $p - 2q + 1 < 0$ (ou seja, $p < 2q - 1$), então pelo Critério da Comparação a integral imprópria $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^p}{(1+x^2)^q}\,dx$ é convergente se $p < 2q - 1$.

Portanto, por (a) e (b), temos que a integral imprópria $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p}{(1+x^2)^q}\,dx$ é convergente se $-1 < p < 2q - 1$ e neste caso

$$\int_0^\infty \frac{x^p}{(1+x^2)^q}\,dx = \int_0^1 \frac{x^p}{(1+x^2)^q}\,dx + \int_1^\infty \frac{x^p}{(1+x^2)^q}\,dx.$$

Por exemplo, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^3}{(1+x^2)^4}\,dx$ (com $p = 3$ e $q = 4$) e $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx$ (com p=1/2 e q=3/2) são integrais impróprias convergentes.

Exemplo 4.5 Considere a integral imprópria $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x(\ln(x))^p}\,dx$. Para $x \geq 2$ temos que $\ln(x) > 0$ (para $x \geq 2$). Logo,

$$\left|\frac{\operatorname{sen}(x)}{x(\ln(x))^p}\right| = \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{|x(\ln(x))^p|} \leq \frac{1}{x(\ln(x))^p}.$$

Para $p > 1$ temos

$$\begin{aligned}
\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln(x))^p}\,dx &= \lim_{t\to\infty}\int_2^t \frac{1}{x(\ln(x))^p}\,dx \\
&= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{1-p}\,(\ln(x))^{1-p}\Big|_2^t \\
&= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{1-p}\,(\ln(t))^{1-p} - \frac{1}{1-p}\,(\ln(2))^{1-p}\right] \\
&= -\frac{1}{1-p}\,(\ln(2))^{1-p},
\end{aligned}$$

pois se $p > 1$ $(1-p < 0)$ temos $\lim_{t\to\infty}\frac{1}{1-p}\,(\ln(t))^{1-p} = 0$. Portanto, a integral imprópria

$$\int_2^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x(\ln(x))^p}\,dx$$

é (absolutamente) convergente se $p > 1$.

Exemplo 4.6 Considere a integral imprópria $\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{(1+x^2)^3}\,dx$. Usando o teste de Dirichlet com

$$h(x) = \frac{\cos(x)}{(1+x^2)^3} = \frac{1}{(1+x^2)^3}\cos(x) = f(x)\,g(x),$$

sendo $g(x) = \frac{1}{(1+x^2)^3}$ e $f(x) = \cos(x)$. Temos,

(i) a função $f(x) = \cos(x)$ é contínua em $[0,\infty)$ e também temos que a função $F(x) = \int_0^t f(x)\,dx = \int_0^t \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(t)$ é limitada em $[0,\infty)$;

(ii) $g'(x) = -\frac{6x}{(1+x^2)^4}$ é absolutamente integrável ($\int_0^\infty |g'(x)|\,dx < \infty$) e $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$.

Portanto, pelo Teste de Dirichlet, a integral imprópria $\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{(1+x^2)^3}\,dx$ é convergente.

Exemplo 4.7 Considere a integral imprópria $\int_0^\infty \frac{x^4\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}{(1+x^2)^3}\,dx$. Temos que

$$f(x) = \frac{x^4\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}{(1+x^2)^3} \geq 0 \;\text{ e }\; g(x) = \frac{1}{(1+x^2)} > 0.$$

Vamos verificar as condições do Teste do Limite da Comparação.

(a) Temos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to\infty}\frac{(1+x^2)x^4\cos^2\left(\dfrac{1}{x}\right)}{(1+x^2)^3}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^6\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\cos^2\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x^6\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^3}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\cos^2\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^3}=1.\end{aligned}$$

(b) Além disso, temos

$$\begin{aligned}\int_0^\infty g(x)\,dx &= \lim_{t\to\infty}\int_0^t\frac{1}{1+x^2}\,dx\\ &= \lim_{t\to\infty}\operatorname{arc\,tg}(x)\Big|_0^t\\ &= \lim_{t\to\infty}\operatorname{arc\,tg}(t)=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Portanto, pelo Teste Limite da Comparação (Teorema 2.10) a integral imprópria

$$\int_0^\infty\frac{x^4\cos^2\left(\dfrac{1}{x}\right)}{(1+x^2)^3}\,dx$$

é convergente.

5 A função Gama e a função Beta de Euler

Nesta seção vamos apresentar alguns resultados da função gama de Euler (ou simplesmente, função gama), que é denotada por $\Gamma(x)$, $x\in D_\Gamma\subset\mathbb{R}$. A função gama pode ser utilizada na resolução de equações diferenciais ordinárias pelo método de expansão em séries de potências ou pelo método de Frobenius.

A função gama foi inicialmente concebida por Euler como uma generalização contínua do fatorial de números naturais: $n!$, para $n\in\mathbb{N}$. A ideia de Euler era encontrar uma função Γ que satisfizesse $\Gamma(1)=1$ e também satisfizesse a equação funcional

$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ para todo x real positivo. Depois de várias tentativas Euler concluiu que a função

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\prod_{m=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{x}\left(1+\frac{x}{m}\right)^{-1}\right] \tag{5.7}$$

satisfazia as condições desejadas. Euler estudou diversas propriedades da função definida em (7). Uma dessas propriedades identificadas por Euler foi o fato que $\Gamma(x)$ pode ser escrita na forma de uma integral

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,dt. \tag{5.8}$$

Vamos iniciar o nosso tratamento da função gama definindo-a por (8).

Definição 5.1 Para $\alpha \geq 1$ definimos a função

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,x^{\alpha-1}\,dx$$

que é chamada de função Gama.

Vamos verificar que esta integral imprópria é convergente.

Considere a função $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ para $x \geq 1$. Temos,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}x^{\alpha-1}}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^{\alpha+1}}{\mathrm{e}^x} = 0.$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$ existe $K = K(\varepsilon)$ tal que

$$0 < \mathrm{e}^{-x}\,x^{\alpha+1} \leq \varepsilon\,x^{-2}, \quad \text{para } x \geq K.$$

Como a integral imprópria $\displaystyle\int_K^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ é convergente, então $\displaystyle\int_K^\infty \mathrm{e}^{-x}\,x^{\alpha-1}\,dx$ é convergente. Portanto, para $\alpha \geq 1$, temos que

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,x^{\alpha-1}\,dx < \infty.$$

Agora, para $0 < \alpha < 1$, temos que a integral imprópria $\displaystyle\int_0^1 x^{\alpha-1}\,dx$ é convergente. Como $0 < \mathrm{e}^{-x} \leq 1$ para todo $x \geq 0$, temos pelo Critério da Comparação que a integral imprópria $\int_0^1 e^{-x}\, x^{\alpha-1}\, dx$ é convergente (com $0 < \alpha < 1$). Logo, podemos definir a função Gama para todo $\alpha > 0$ considerando como a soma

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x}\, x^{\alpha-1}\, dx = \int_0^1 e^{-x}\, x^{\alpha-1}\, dx + \int_1^\infty e^{-x}\, x^{\alpha-1}\, dx.$$

Temos que, para todo $\alpha > 0$,

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma(\alpha). \tag{5.9}$$

De fato,

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty e^{-x}\, x^{(\alpha+1)-1}\, dx = \int_0^\infty e^{-x}\, x^{\alpha}\, dx.$$

Agora, usando integração por partes, obtemos

$$\int_0^t e^{-x}\, x^{\alpha}\, dx = -\,t^{\alpha}\, e^{-t} + \alpha \int_0^t e^{-x}\, x^{\alpha-1}\, dx,$$

e então

$$\int_0^\infty e^{-x}\, x^{\alpha}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-x}\, x^{\alpha}\, dx = \alpha \int_0^\infty e^{-x}\, x^{\alpha-1}\, dx = \alpha\,\Gamma(\alpha),$$

pois $\lim_{t\to\infty} t^{\alpha} e^{-t} = 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Portanto, $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma(\alpha)$, se $\alpha > 0$.

Com isso, temos

$$\begin{aligned}
\Gamma(1) &= \int_0^\infty e^{-x}\, dx = 1\\
\Gamma(2) &= \Gamma(1+1) = 1\,\Gamma(1) = 1\\
\Gamma(3) &= \Gamma(2+1) = 2\,\Gamma(2) = 2 = 2!\\
\Gamma(4) &= \Gamma(3+1) = 3\,\Gamma(3) = 6 = 3!\\
\Gamma(5) &= \Gamma(4+1) = 4\,\Gamma(4) = 24 = 4!
\end{aligned}$$

e por indução obtemos $\Gamma(n+1) = n!$ para $n \in \mathbb{N}$.

Vamos verificar agora que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

De fato, temos que $\Gamma(1/2) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\, x^{-1/2}\, dx$. Usando a mudança de variável $x = u^2$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\Gamma(1/2) = &= \int_0^\infty e^{-x}\, x^{-1/2}\, dx \\
&= 2\int_0^\infty e^{-u^2}\, du \\
&= 2\,\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.
\end{aligned}
$$

Com isso e usando (9) obtemos

$$
\begin{aligned}
&\Gamma(3/2) = \Gamma(1/2+1) = \frac{1}{2}\Gamma(1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2},\\
&\Gamma(5/2) = \Gamma(2+1/2) = \Gamma(3/2+1) = \frac{3}{2}\Gamma(3/2) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4},\\
&\Gamma(7/2) = \Gamma(3+1/2) = \Gamma(5/2+1) = \frac{5}{2}\Gamma(5/2) = \frac{15\sqrt{\pi}}{8},\\
&\Gamma\Big(n+\frac{1}{2}\Big) = \frac{1.3....(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{4^n\, n!}\sqrt{\pi},\ n\in\mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Agora, observe que para $x > 0$, temos

$$
\begin{aligned}
\Gamma'(x) &= \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, \ln(t)\, dt,\\
\Gamma''(x) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, (\ln(t))^2\, dt.
\end{aligned}
$$

Logo, $\Gamma''(x) > 0$ para $x > 0$. Portanto, Γ é uma função convexa em $\mathbb{R}_+ = \{x\in\mathbb{R} : x > 0\}$.

Vamos agora fazer a extensão da função Γ para $x \le 0$.

Para $x > 0$, usando que $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$, obtemos

$$\Gamma(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)....\,(x+1)\,x\,\Gamma(x),$$

e então podemos escrever

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{(x+n-1)(x+n-2)...(x+1)\,x}. \tag{5.10}$$

Como $\Gamma(x+n)$ está definida para $x+n > 0$, então (10) prolonga $\Gamma(x)$ na região $x > -n$, exceto nos pontos $x = -k$ ($k = 0, 1, ..., n-1$). Usando (10), obtemos para

$x > -n$

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= \frac{\Gamma(x+1+n)}{(x+n)(x+n-1)...(x+1)} \\
&= \frac{(x+n)\Gamma(x+n)}{(x+n)(x+n-1)...(x+1)} \\
&= \frac{\Gamma(x+n)}{(x+n-1)...(x+1)} \\
&= x\,\Gamma(x).
\end{aligned}$$

Com isso, podemos calcular a função gama para valores negativos não inteiros. Por exemplo, usando que $\Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{x}$, temos

$$\begin{aligned}
&\Gamma(-1/2) = -2\,\Gamma(1/2) = -2\sqrt{\pi}, \\
&\Gamma(-3/2) = -\frac{2}{3}\,\Gamma(-3/2+1) = -\frac{2}{3}\Gamma(-1/2) = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}.
\end{aligned}$$

Definição 5.2 Para $x > 0$ e $y > 0$, a função Beta de Euler é definida por

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,dt. \tag{5.11}$$

Se $x \geq 1$ e $y \geq 1$, esta integral é própria (ou uma integral definida), mas se $0 < x < 1$ ou $0 < y < 1$, a integral é imprópria.

É possível provar que

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{5.12}$$

Exemplo 5.3 Aplicando a mudança de variável $t = u^{1/n}$ ($n \in \mathbb{R}$ e $n > 0$) na integral

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^n}}\,dt,$$

e usando (12), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^n}}\,dt &= \int_0^1 \frac{1}{n}\,\frac{1}{\sqrt{1-u}}\,u^{1/n-1}\,du \\
&= \frac{1}{n}\int_0^1 u^{1/n-1}(1-u)^{-1/2}\,du \\
&= \frac{1}{n}B(1/n,1/2) \\
&= \frac{1}{n}\,\frac{\Gamma(1/n)\,\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/n+1/2)} \\
&= \frac{1}{n}\,\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(1/n)}{\Gamma((n+2)/2n)}.
\end{aligned}$$

Por exemplo, se $n = 2/3$, temos

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^{2/3}}}\,dx = \frac{3}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(2)} = \frac{3\,\pi}{4}.$$

Agora, para $n = 1/2$, obtemos

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}\,dx = 2\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(5/2)} = 2\sqrt{\pi}.1.\frac{4}{3\sqrt{\pi}} = \frac{8}{3}.$$

Exemplo 5.4 Para $x > 0$ e $y > 0$, fazendo a mudança de variável $t = (\operatorname{sen} u)^2$ em (11) obtemos

$$B(x,y) = 2\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} u)^{2x-1}(\cos u)^{2y-1}\,du. \tag{5.13}$$

Com isso, para $x = n + \dfrac{1}{2}$ $(n \in \mathbb{N})$ e $y = 1/2$, obtemos (usando (12))

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} u)^{2n}\,du &= \frac{1}{2}\,B(n+\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\,\Gamma(1/2)}{\Gamma(n+1/2+1/2)} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)} \\
&= \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}\,\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Por exemplo, (com $n = 5$), $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen}(x))^{10}\,dx = \frac{189}{1536}\pi.$

De forma análoga, obtemos que

$$\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} x)^{2n+1}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{3}{2})} = \frac{2.4.6...(2n)}{1.3.5...(2n+1)}.$$

Também temos, para p e q inteiros não negativos (usando (13))

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} (\cos(\theta))^{2p-1}(\operatorname{sen}(\theta))^{2q-1}\,d\theta &= \frac{1}{2}B(p,q) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \\
&= \frac{1}{2}\frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}.
\end{aligned}$$

Por exemplo, com $p = 5$ e $q = 6$, temos $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos(x))^9(\operatorname{sen}(x))^{11}\,dx = \frac{1}{2520}.$

6 Excercícios

(1) Determine se cada integral imprópria é convergente ou divergente.

$$(a)\ \int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,dx$$
$$(b)\ \int_1^\infty \frac{x+2}{x^2+1}\,dx$$
$$(c)\ \int_1^\infty \frac{\mathrm{sen}(1/x)}{x}\,dx$$
$$(d)\ \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x^2}\,dx.$$

(2) Determine os valores de p para que a integral imprópria seja convergente.

$$(a)\ \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{sen}(x)}{x^p}\,dx$$
$$(b)\ \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{x^p}\,dx$$
$$(c)\ \int_0^\infty x^p e^{-x}\,dx$$
$$(d)\ \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{sen}(x)}{(\mathrm{tg}(x))^p}\,dx$$

(3) Determine os valores de $p,q \in \mathbb{R}$ para que sejam convergentes as seguintes integrais impróprias.

$$(a)\ \int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx$$
$$(b)\ \int_1^\infty \frac{x^p}{(1+x^2)^q}\,dx$$
$$(c)\ \int_{-1}^1 \frac{(\cos(\pi x/2))^q}{(1-x^2)^p}\,dx$$
$$(d)\ \int_{-1}^1 (1-x)^p(1+x)^q\,dx$$

Respostas

(1) (a) convergente, (b)divergente, (c) absolutamente convergente,

(d) convergente.

(2) (a) $p < 2$, (b) $p < 1$, (c) $p > -1$, (d) $-1 < p < 2$

(3) (a) convergente se $p, q > -1$, (b) convergente se $-1 < p < 2q - 1$,

(c) convergente se $p - q < 1$, (d) convergente se $p, q < 1$.