APLICAÇÕES DA DIFERENCIAÇÃO

Esboços de Gráficos

Preceptora:	Isadora Honório Guimarães
Coordenadora:	Patrícia Hilário Tacuri Córdova Claudete Matilde Webler Martins

Roteiro para esboçar uma curva:

ⓐ *Domínio da função: Devemos determinar o maior subconjunto possível, nos* $\mathbb{R}$, *onde a expressão dada para a função está bem definida (não podemos ter zero no denominador e a raíz de indíce par só existe para números positivos).*

ⓑ *Intercepto(s): Onde a função cruza os eixos do plano cartesiano (com o eixo* y *é o ponto onde a função intercepta o eixo vertical, basta calcular* $f(0)$. *Com o eixo* x *são os pontos onde a função intercepta o eixo horizontal, para descobrir-los, basta calcular* $f(x) = 0$*).*

ⓒ *Simetria (e quando a função for trigonométrica, também analisamos a periodicidade): A função é par se* $f(x) = f(-x)$, *é ímpar se* $f(-x) = -f(x)$ *e não tem simetria se não se encaixar em nenhum dos dois. A periodicidade é o intervalo após o qual a função se repete.*

ⓓ *Assíntotas: São retas que a função se aproxima, mas nunca toca (verticais: valores de* x *que fazem a função ir para o infinito; e horizontais: valores que a função se aproxima quando* x *vai para o infinito positivo ou negativo).*

ⓔ *Intervalos de crescimento e decrescimento: Diz onde a função sobre ou desce no gráfico (a função é crescente onde a derivada primeira é positiva e é decrescente onde a deirivada primeira é negativa).*

ⓕ *Máximos e mínimos locais: São os pontos mais altos ou mais baixos em trechos do* *gráfico (se a função muda de crescente para decrescente, temos um máximo local; se ela muda de decrescente para crescente, temos um mínimo local. Isso é verificado analisando a mudança de sinal da primeira derivada).*

g *Concavidade e pontos de inflexão: A primeira nos informa se a função é curvada para cima ou para baixo (se a segunda derivada é positiva a concavidade é para cima, se ela é negativa, a concavidade é para baixo). Os pontos de inflexão nos indica onde a concavidade muda de sentido, eles ocorrem onde a segunda derivada é igual a zero.*

1. Esboce o gráfico das seguintes curvas seguindo o roteiro acima:

   a) $y = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$

   a

   Domínio: $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq 1 \text{ e } x \neq -1\}$

   b

   Interceptos: Quando $x = 0$:

   $$y = \frac{1+0}{1-0} = \frac{1}{1} = 1$$

   Quando $y = 0$

   $$0 = \frac{1+x^2}{1-x^2} \Rightarrow 1 + x^2 = 0, \ \nexists \ x \in \mathbb{R} \text{ que satisfaça essa equação.}$$

   $\therefore$ o único intercepto é $(0, 1)$.

   c

   Simetria: Seja $y = f(x)$, $f(-x) = \dfrac{1+(-x)^2}{1-(-x)^2} = \dfrac{1+x^2}{1-x^2} = f(x) = y$. Logo, a função é par.

   d

Assíntotas:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{1+x^2}{1-x^2} &= \frac{\infty}{-\infty} \text{ usando L'Hopital, temos:}\\
\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{-2x} &= \frac{\infty}{-\infty}, \text{ usando L'Hopital novamente:}\\
\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{-2x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{-2} = -1\\
\lim_{x\to-\infty} \frac{1+x^2}{1-x^2} &= \frac{\infty}{-\infty} \text{ usando L'Hopital, temos:}\\
\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-2x} &= \frac{-\infty}{\infty}, \text{ usando L'Hopital novamente:}\\
\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-2x} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{-2} = -1
\end{aligned}$$

$\therefore$ $y = 1$ é assíntota horizontal da função e $y = 0$ também, já que a função nunca cruxa o eixo x.

Como y não está definida para $x = 1$ e $x = -1$, verificaremos se essas retas são assíntotas verticais:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to1^+} \frac{1+x^2}{1-x^2} &= -\infty\\
\lim_{x\to1^-} \frac{1+x^2}{1-x^2} &= +\infty\\
\lim_{x\to-1^+} \frac{1+x^2}{1-x^2} &= +\infty\\
\lim_{x\to-1^-} \frac{1+x^2}{1-x^2} &= -\infty
\end{aligned}$$

$\therefore x = 1$ e $x = -1$ são assíntotas verticais de y.

e

Crescimento e decrescimento:

$$\begin{aligned}
y = \frac{1+x^2}{1-x^2} \Rightarrow y' &= \frac{2x(1-x^2) - (1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2}\\
&= \frac{2x - 2x^3 - (-2x - 2x^3)}{(1-x^2)^2}\\
&= \frac{2x - 2x^3 + 2x + 2x^3}{(1-x^2)^2}\\
&= \frac{4x}{(1-x^2)^2}
\end{aligned}$$

Para analisarmos onde y é crescente, basta calcularmos onde $y' > 0$. E basta que $4x > 0$, já que $(1-x^2)^2 > 0 \; \forall \; x \in Dom(y)$.

$$4x > 0 \Rightarrow x > 0$$

$\therefore$ y é crescente em $(0, +\infty)$
e é decrescente em $(-\infty, 0)$.

f
Máximos e mínimos: Através da deirivada primeira, temos que em $x = 0$, temos um ponto de mínimo:

$$f(0) = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

$\therefore$ o ponto mínimo é 1 em $x = 0$ e não há ponto de máximo.

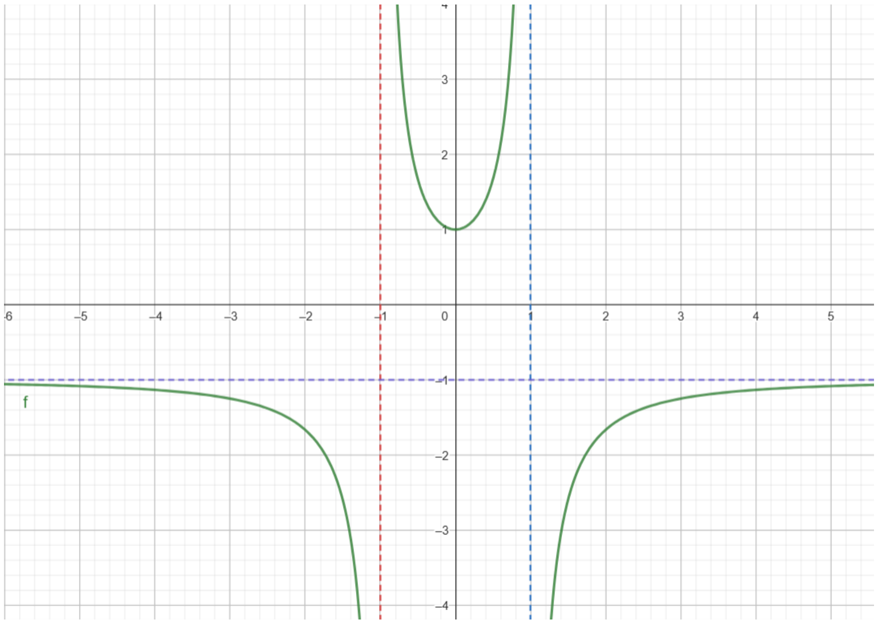
g
Concavidade e pontos de inflexão:

$$\begin{aligned} y' = \frac{4x}{(1-x^2)^2} \Rightarrow y'' &= \frac{4(1-x^2)^2 - 4x \cdot 2(1-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^4} \\ &= \frac{4(1-x^2) - 8x(-2x)}{(1-x^2)^3} \\ &\frac{4 - 4x^2 + 16x^2}{(1-x^2)^3} \\ &= \frac{12x^2 + 4}{(1-x^2)^3} \end{aligned}$$

Para analisarmos onde y é côncava para cima, basta calcularmos $y'' > 0$, e como $12x^2 + 4 > 0 \; \forall \; x \in \mathbb{R}$, basta que $(1-x^2)^3 > 0$, então:

$$(1-x^2)^3 > 0 \Rightarrow 1 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 - 1 < 0 \Rightarrow -1 < x < 1$$

$\therefore$ y é côncava para cima em $(-1, 1)$
e é côncava para baixo em $(-\infty, -1) \, \cup \, (1, +\infty)$.
Além disso, y tem pontos de inflexão em $x = -1$ e $x = 1$ e, como já sabemos, nesses pontos têm-se assíntotas verticais.



b) $y = \dfrac{1}{x^3 - x}$

(a)

Domínio: $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq 1, \ x \neq -1 \text{ e } x \neq 0\}$

(b)

Interceptos:

Como $x \neq 0$ e $\dfrac{1}{x^3 - x}$ nunca é igual a zero, a função não tem interceptos.

(c)

Simetria: Seja $y = f(x)$, $f(-x) = \dfrac{1}{(-x^3) - (-x)} = \dfrac{1}{-x^3 + x} = -f(x) = -y$.

Logo, a função é ímpar.

(d)

Assíntotas:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^3 - x} = 0$$
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3 - x} = 0$$

$\therefore \ y = 0$ é assíntota horizontal de y.

Como y não está definida para $x = 0$, $x = 1$ e $x = -1$, verificaremos se essas retas são assíntotas verticais:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x^3 - x} = +\infty$$
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x^3 - x} = -\infty$$
$$\lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x^3 - x} = +\infty$$
$$\lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x^3 - x} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3 - x} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^3 - x} = +\infty$$

Então, as retas $x = 0$, $x = -1$ e $x = 1$ são assíntotas verticais.

e

Crescimento e decrescimento:

$$y = \frac{1}{x^3 - x} \Rightarrow y' = \frac{-1(3x^2 - 1)}{(x^3 - x)^2} = \frac{-3x^2 + 1}{(x^3 - x)^2}$$

Para analisarmos onde y é crescente, basta calcularmos onde $y' > 0$. E basta que $-3x^2 + 1 > 0$, já que $\forall\, x \in Dom(y)\ (x^3 - x)^2 > 0$.

$$-3x^2 + 1 > 0 \Rightarrow 3x^2 - 1 < 0 \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Logo, y é crescente em $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

e é decrescente em $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$

f

Máximos e mínimos: Em $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ temos ponto de mínimo e em $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

temos ponto de máximo.

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{1}{-\frac{3\sqrt{3}}{27} + \frac{9\sqrt{3}}{27}} = \frac{1}{\frac{6\sqrt{3}}{27}} = \frac{27}{6\sqrt{3}} = \frac{9}{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{1}{\frac{3\sqrt{3}}{27} - \frac{9\sqrt{3}}{27}} = \frac{1}{-\frac{6\sqrt{3}}{27}} = -\frac{27}{6\sqrt{3}} = -\frac{9}{2\sqrt{3}}$$

$$= -\frac{9\sqrt{3}}{6} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore$ o máximo é $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ em $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e o mínimo é $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ em $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

g

Concavidade e pontos de inflexão:

$$y' = \frac{-3x^2+1}{(x^3-x)^2} \Rightarrow y'' = \frac{(-6x)(x^3-x)^2 - (-3x^2+1)2(x^3-x)(3x^2-1)}{(x^3-x)^4}$$

$$= \frac{-6x(x^3-x) - (-6x^2+2)(3x^2-1)}{(x^3-x)^3}$$

$$= \frac{-6x^4+6x^2-(-18x^4+6x^2+6x^2-2)}{(x^3-x)^3}$$

$$= \frac{-6x^4+6x^2+18x^4-12x^2+2}{(x^3-x)^3}$$

$$= \frac{12x^4-6x^2+2}{(x^3-x)^3}$$

Para analisarmos onde y é côncava para cima, basta calcularmos $y'' > 0$:

$$\frac{12x^4-6x^2+2}{(x^3-x)^3} > 0 \Rightarrow 12x^4-6x^2+2 > 0 \text{ e } (x^3-x) > 0$$

Analisaremos primeiro a primeira inequação:

$12x^4 - 6x^2 + 2 > 0$ seja $x^2 = z$, então:

$12x^4 - 6x^2 + 2 > 0 = 6x^4 - 3x^2 + 1 > 0 = 12z^2 - 6z + 2 > 0 \Rightarrow$

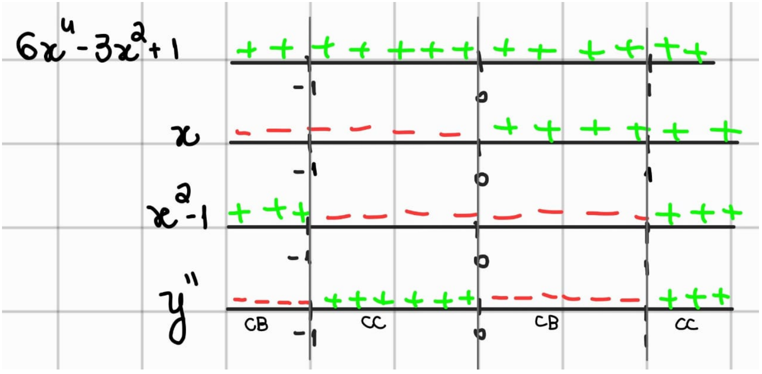
$6z^2 - 3z + 1 > 0.$

Igualando a zero para descobrir as raízes temos:

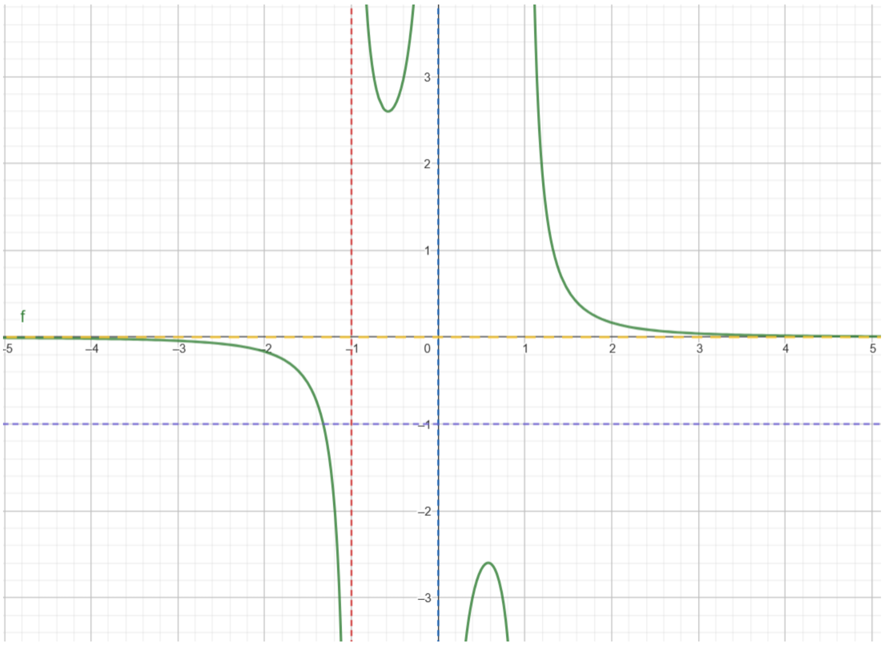
$$6z^2 - 3z + 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{3 \pm \sqrt{9-24}}{12}$$

Como o número que está dentro da raíz é negativo, significa que essa equação não tem raízes, então $\forall\ z \in \mathbb{R}\ 6z^2 - 3z + 1 > 0$ e consequantemente: $6x^4 - 3x^2 + 1 > 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}$. Então, basta garantirmos que:

$$(x^3 - x)^3 > 0 \Rightarrow x^3 - x > 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) > 0 \Rightarrow x > 0 \textbf{ e } x < -1 \text{ ou } x > 0$$



Então, y é côncava para cima em $(-1, 0)\ \cup\ (1, +\infty)$
e é côncava para baixo em $(-\infty, -1)\ \cup\ (0, 1)$.
E também, y tem pontos de inflexão em $x = 0$, $x = -1$ e $x = 1$ e, como já sabemos, nesses pontos têm-se assíntotas verticais.



Referências

[1] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um curso de cálculo: volume 1*. Rio de Janeiro. LTC–Livros Técnicos e Científicos. 5ª edição, 2001.

[2] STEWART, James. *Cálculo*, Volume 1. Editora Cengage Learning, 7ª edição, 2013.