Universidade Estadual de Maringá - Departamento de Matemática
Cálculo Diferencial e Integral: um KIT de Sobrevivência

Equação quadrática

Prof. Doherty Andrade – DMA-UEM

Resumo: Nestas notas faremos um breve estudo sobre as principais propriedades das funções quadráticas: existência de raízes, valores máximos e mínimos, gráficos e algumas aplicações simples.

Sumário

1 Objetivo

Estudar funções definidas por equações da forma

$$y = ax^2 + bx + c, a \neq 0,$$

o termo quadrático dá o nome a essas funções, chamadas de funções quadráticas.

2 Fórmula quadrática

Suponha que temos que resolver uma equação do segundo grau

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0. \tag{2.1}$$

Toda equação quadrática pode ser resolvida usando o método de completar quadrados. Vejamos como completar quadrados.

Dividindo essa equação por a, obtemos

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Ou equivalentemente,

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}. \tag{2.2}$$

Somando $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ a ambos os lados de equação (2.2), temos

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \tag{2.3}$$

Note que o lado esquerdo da igualdade acima é um quadrado perfeito e pode ser escrito como tal

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \tag{2.4}$$

Extraindo a raiz de ambos os lados, temos

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{2.5}$$

Assim,

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{2.6}$$

Logo, as soluções da equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$, são dadas pela seguinte fórmula chamada de fórmula quadrática:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \tag{2.7}$$

Exemplo: Resolver a equação $2x^2 - 3x + 5 = 0$. Para isso vamos usar a fórmula quadrática equação (2.7):

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Comparando com $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ obtemos que

$$\begin{aligned} a &= 2, \\ b &= -3, \\ c &= 5. \end{aligned}$$

Substituindo na fórmula quadrática temos

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 2 \times 5}}{2 \times 2} \\ &= \frac{3 \pm \sqrt{9 - 40}}{4} \\ &= \frac{3 \pm i\sqrt{31}}{4}. \end{aligned}$$

Logo, o conjunto solução é

$$\left\{ \frac{3 + i\sqrt{31}}{4}, \frac{3 - i\sqrt{31}}{4} \right\}$$

3 Analisando o discriminante

Já vimos que a fómula quadrática dá as soluções de $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$, como

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Se chamarmos $D = b^2 - 4ac$ (discriminante), as duas raízes podem ser expressas por

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \\ r_2 &= \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}. \end{aligned}$$

Note que pela expressão acima a natureza das raízes depende apenas do sinal de D.

Vamos apresentar alguns exemplos e observar a relação entre D e a natureza das raízes.
Exemplos:
(a) A equação $x^2 - 4x + 1 = 0$ tem $D = 12 > 0$ e as raízes são

$$\begin{aligned} r_1 &= 2 + \sqrt{3} \\ r_2 &= 2 - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Nesse exemplo, temos $D > 0$ e as duas raízes são reais e diferentes.
(b) A equação $x^2 - 4x + 4 = 0$ tem $D = 0$ e as duas raízes são

$$\begin{aligned} r_1 &= 2 \\ r_2 &= 2. \end{aligned}$$

Nesse exemplo, temos $D = 0$ e as duas raízes são reais e iguais.
(c) A equação $x^2 - 4x + 5 = 0$ tem $D = -4 < 0$ e as duas raízes são

$$\begin{aligned} r_1 &= 2 + i \\ r_2 &= 2 - i. \end{aligned}$$

Nesse exemplo, temos $D < 0$ e as duas raízes são complexas e conjugadas.
Resumo:
Podemos resumir as observações como:

- Se $D > 0$, então as duas raízes são reais e diferentes.
- Se $D = 0$, então as duas raízes são reais e iguais.
- Se $D < 0$, então as duas raízes são complexas e conjugadas.

4 Relação entre os coeficientes e as raízes

Vimos que as raízes de de $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ podem ser expressas por

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \\ r_2 &= \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}. \end{aligned}$$

assim, somando as duas raízes obtemos:

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= \left(\frac{-b + \sqrt{D}}{2a}\right) + \left(\frac{-b - \sqrt{D}}{2a}\right) \\ &= \frac{-b}{a}. \end{aligned}$$

e multiplicando as duas raízes

$$
\begin{aligned}
r_1 r_2 &= \left(\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\right) \times \left(\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right) \\
&= \frac{b^2 - D}{4a^2} \\
&= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}.
\end{aligned}
$$

Segue que

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

pode ser expressa como

$$x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2 = 0. \tag{4.8}$$

ou

$$a(x - r_1)(x - r_2) = 0.$$

Exemplos

(a) Determine se $r_1 = \dfrac{5+\sqrt{17}}{4}$ e $r_2 = \dfrac{5-\sqrt{17}}{4}$ são soluções da equação $2x^2 - 5x + 1 = 0$.

A ideia é usar a expressão equação (4.8). Podemos escrever a equação como $x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{1}{2} = 0$. Assim, devemos ter $r_1 + r_2 = \left(\dfrac{5+\sqrt{17}}{4}\right) + \left(\dfrac{5-\sqrt{17}}{4}\right) = \dfrac{5}{2} = \dfrac{-b}{a}$.

Por outro lado $r_1 r_2 = \left(\dfrac{5+\sqrt{17}}{4}\right) \times \left(\dfrac{5-\sqrt{17}}{4}\right) = \dfrac{25-17}{16} = \dfrac{25-17}{16} = \dfrac{8}{16} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{c}{a}$. Segue que r_1 e r_2 são soluções da equação $2x^2 - 5x + 1 = 0$.

(b) Determine dois números cuja soma e 8 e o produto e 15.

Sabemos que os dois números r_1 e r_2 devem satisfazer à seguinte equação equação (4.8):

$$x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2 = 0.$$

Ou seja

$$x^2 - (8)x + 15 = 0.$$

Usando a fórmula quadrática, obtemos

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \times 1 \times 15}}{2 \times 2} \\ &= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{2} \\ &= \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2} = 4 \pm 1. \end{aligned}$$

Assim, os números são $r_1 = 3$ e $r_2 = 5$.

5 Gráficos

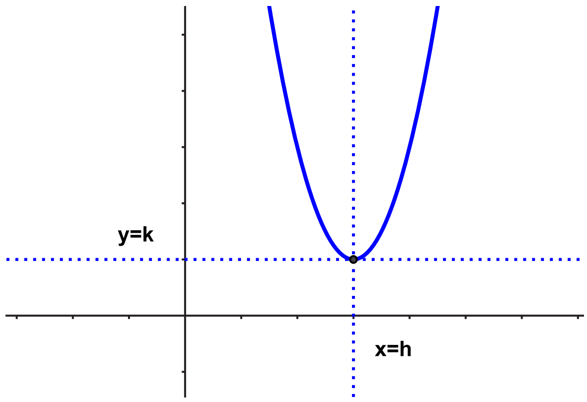
A equação quadrática $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$, pode ser reescrita como

$$y = a(x-h)^2 + k,$$

onde $h = \left(\dfrac{-b}{2a}\right)$ e $k = \left(\dfrac{-D}{4a}\right)$.

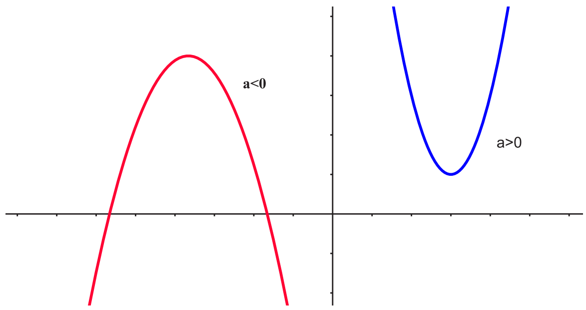
Você pode verificar isso facilmente completando quadrados como já fizemos anteriormente. Veja a expressão equação (2.4).

O gráfico de $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$, é uma parábola com vértice no ponto $V = (h, k)$ e a reta vertical $x = h$ é a reta de simetria.



Note que se $a > 0$ o vértice é o ponto do gráfico que está situado mais baixo (chamado de ponto de mínimo global). Também dizemos que a parábola se abre para cima. Veja o gráfico abaixo.

E se $a < 0$ o vértice é o ponto do gráfico que está situado mais alto (chamado de ponto de máximo global).Também dizemos que a parábola se abre para baixo. Veja o gráfico abaixo.



Exemplos
(a) A parábola $y = -3(x-2)^2 + 6$ tem eixo de simétria dado pela reta vertical $x = 2$ e vértice $V = (2, 6)$. Como $a = -3 < 0$ o seu gráfico se abre para baixo. Selecione e marque alguns pontos para auxiliar no traçado do gráfico.

(b) A parábola $y = (x-1)^2 + 2$ tem eixo de simétria dado pela reta vertical $x = 1$ e vértice $V = (1, 2)$. Como $a = 1 > 0$ o seu gráfico se abre para cima. Selecione e marque alguns pontos para auxiliar no traçado do gráfico.

6 Aplicação

Considere o seguinte problema: determinar as dimensões da região retangular de maior área possível que tem perímetro igual a 20 metros.

Inicialmente, vamos chamar as dimensões do retângulo de x e y. Assim, o seu perímetro é $x + y = 20$ e sua área é xy. Como $y = 20 - x$ segue que a área $A(x) = x(20 - x)$ pode ser escrita como

$$A(x) = -(x - 10)^2 + 100.$$

Esta é uma parábola que se abre para baixo e portanto, tem o seu máximo global no vértice cujo ponto é $V(10, 100)$.

Segue que $x = 10$ e $y = 20 - 10 = 10$ são as dimensões do retângulo e portanto, o retângulo é um quadrado cujo lado mede 10 metros. Segue que a área máxima da região é de 100 metros quadrados.

7 Equações relacionadas a equações quadráticas

Uma equação radical é uma equação tendo uma variável no radicando. Por exemplo,

$$\sqrt{x+1} = 3.$$

Podemos resolver essa equação elevando ambos os lados ao quadrado, obtendo

$$x + 1 = 9.$$

Segue que $x = 8$. Substituindo $x = 8$ na equação $\sqrt{x+1} = 3$ vemos que $x = 8$ é de fato solução.

Outro exemplo é a equação $\sqrt{x+4} + 8 = x$. Reescrevendo como $\sqrt{x+4} = x - 8$ e elevando ao quadrado ambos os lados obtemos,

$$x + 4 = (x - 8)^2.$$

O que resulta em

$$x^2 - 17x + 60 = 0,$$

cujas soluções são $x = 5$ e $x = 12$.

Substituindo esses valores na equação radical $\sqrt{x+4} + 8 = x$ vemos que apenas $x = 12$ é uma solução.

Referências

[1] L. Childs, A concrete introduction to higher algebra. Springer-Verlag, New York, 1979.