



Cálculo Diferencial e Integral: um KIT de sobrevivência

This worksheet is in Portuguese language.

Prof. Doherty Andrade - doherty@uem.br

Funções Definidas por Integrais

Como derivar? Uso da regra de Leibniz

Nesta página vamos rever a técnica de derivar sob o sinal de integração. A regra é devido a Leibniz.

Objetivo: derivar expressões do tipo $G(x) = \int_{h_0(x)}^{h_1(x)} f(x, y) dy$.

1. Introdução

O **teorema de Leibniz** diz o seguinte:

Teorema 1

Seja $f(x, y)$ uma função com domínio $R=[a,b] \times [c,d]$ e imagem nos reais. Chamamos $I=[a,b]$ e $J=[c,d]$.

Suponha que f e f_x sejam contínuas sobre o retângulo R e seja a função dada por

$$G(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

Então, a derivada de $G(x)$ com relação a x é dada por $\int_c^d f_x(x, y) dy$

x em (a,b) .

O **Teorema Genaralizado de Leibniz** estende o resultado acima:

Teorema 2

Suponha que f e a sua derivada com relação a x , f_x , são contínuas no retângulo R , e que $h_0(x)$ e

$h_1(x)$ tem ambas primeira derivada contínua em I com imagem em J . Se $G(x) = \int_{h_0(x)}^{h_1(x)} f(x, y) dy$

para todo x em I , então a sua derivada com relação a x é dada por

$$\int_{h_0(x)}^{h_1(x)} D_1(f)(x, y) dy + D(h_1)(x) f(x, h_1(x)) - D(h_0)(x) f(x, h_0(x))$$

Há também a regra de **Leibniz para derivar funções definidas por integrais impróprias**.

Vamos ver o enunciado e alguns exemplos também. O extremo d pode ser tomado também igual a infinito.

Teorema 3

Seja R o retângulo dado por $[a, b] \times [c, d]$. Como antes $I = [a, b]$ e $J = [c, d]$. Seja $f : R \rightarrow \text{Reais}$ função contínua. Defina

a função G por $G(x, t) = \int_c^t f(x, y) dy$.

Se a integral imprópria $g(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ existe para todo x em I e se $\lim_{t \rightarrow d^-} G(x, t) = g(x)$ existe uniformemente para x em I , então $g(x)$ é contínua em I .

Se além disso, se f_x é contínua sobre o retângulo R e G_x converge uniformemente para $p(x)$ quando t tende a d pela esquerda, isto é, $\lim_{t \rightarrow d^-} G_x(x, t) = p(x)$, então

$$g'(x) = p(x) = \int_c^d f_x(x, y) dy$$

2. Exemplos - Regra de Leibniz

Vamos ver um exemplo fácil derivar com relação a x e a y : $\int_{x^2}^{x^3} \cos(xy) dy$

```
> F:=(x,y)->int(cos(x*y),y=x^2..x^3);
```

$$F := (x, y) \rightarrow \int_{x^2}^{x^3} \cos(xy) \, dy$$

```
> D[1](F);
```

$$(x, y) \rightarrow \frac{\sin(x^3) - \cos(x^3)x^3 - \sin(x^4) + \cos(x^4)x^4}{x^2} + 3x^2 \cos(x^4) - 2x \cos(x^3)$$

```
> simplify(%);
```

$$(x, y) \rightarrow \frac{\sin(x^3) - \cos(x^3)x^3 - \sin(x^4) + \cos(x^4)x^4}{x^2} + 3x^2 \cos(x^4) - 2x \cos(x^3)$$

Mais um exemplo derivar com relação a x e a y : $\int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y) \, dy$

```
> G:=(x,y)->Int(f(x,y),y=a(x)..b(x));
```

$$G := (x, y) \rightarrow \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y) \, dy$$

```
> D[1](G);
```

$$(x, y) \rightarrow \int_{a(x)}^{b(x)} D_1(f)(x, y) \, dy + D(b)(x) f(x, b(x)) - D(a)(x) f(x, a(x))$$

```
> D[2](G);
```

Mais um exemplo derivar com relação a x e $a u$: $\int_{x^2}^{e^x} \frac{\sin(x u)}{u} du$

```
> H:=(x,u)->Int(sin(x*u)/u,u=x^2..exp(x));
```

$$H := (x, u) \rightarrow \int_{x^2}^{e^x} \frac{\sin(x u)}{u} du$$

```
> D[1](H);
```

$$(x, u) \rightarrow \int_{x^2}^{e^x} \cos(x u) du + \sin(x e^x) - \frac{2 \sin(x^3)}{x}$$

```
> D[2](H);
```

0

Outro exemplo.

```
> L:=(x,y)->Int(sin(x*y)/y,y=0..1);
```

$$L := (x, y) \rightarrow \int_0^1 \frac{\sin(x y)}{y} dy$$

```
> D[1](L);
```

$$(x, y) \rightarrow \int_0^1 \cos(x y) dy$$

```
> D[2](L);
```

0

3. Exemplos - Regra de Leibniz para integrais impróprias

Neste exemplo o Maple não sabe calcular a integral, mas deriva corretamente. Vamos derivar a expressão dada por

```
> F:=x ->Int((exp(-x*t),t=0..infinity));
```

$$F := x \rightarrow \int_0^{\infty} e^{(-x t)} dt$$

```
> D[1](F);
```

$$x \rightarrow \int_0^{\infty} -t e^{(-x t)} dt$$

Outro exemplo. Neste exemplo o Maple precisa saber quais valores x assume. Vamos derivar a função definida pela integral imprópria.

```
> assume( x>0 );
```

```
> F:=x ->Int((exp(-x*t)-exp(-t))/t,t=0..infinity));
```

$$F := x \rightarrow \int_0^{\infty} \frac{e^{(-x t)} - e^{(-t)}}{t} dt$$

```
> D[1](F);
```

$$x \rightarrow \int_0^{\infty} -e^{(-x t)} dt$$

O Maple derivou corretamente, mas não simplificou. Vamos obriga-lo a fazer as contas.

```
> D[1](F) := int(-exp(-x*t), t=0..infinity, 'CauchyPrincipalValue');
```

$$D_1(F) := -\frac{1}{x}$$

4. Valor Principal de Cauchy

Como calcular? Veremos exemplos.

Um exemplo do valor principal de Cauchy. Calcular o VPC $\int_{-1}^2 \frac{1}{x^3} dx$

Note que esta integral é imprópria.

```
> int(1/x^3, x=-1..2, 'CauchyPrincipalValue');
```

$$\frac{3}{8}$$

Outro exemplo. Calcular o VPC $\int_0^{\infty} e^{(-x^2)} dx$

```
> int(exp(-x^2), x=0..infinity, 'CauchyPrincipalValue');
```

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

```
>
```

5. Referências

[1] M. H. Protter and C. B. Morrey, A first course in real analysis. Springer Verlag, 1991.