Propriedades das Funções Deriváveis

Prof. Doherty Andrade

2005

Sumário

1

Funções Deriváveis

1.1 Introdução

Dizemos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivável em x, e sua derivada é $f'(x)$, se

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

se o limite existe.

Se $f'(x)$ existe para todo x do seu domínio, dizemos que f é derivável.

Notação: $f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx}$,

Propriedades 1.1.1 *Sejam f e g funções deriváveis em a e $k \in \mathbb{R}$. Então,*
a) se $f(x) \equiv c$, então $f'(x) = 0$.
b) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
c) $(kf)'(x) = kf'(x)$.
d) $(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$.
e) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g^2(x)}$.

Teorema 1.1.2 *Se f tem derivada em $x = a$, então f é contínua em $x = a$.*

Demonstração: como $f'(a)$ existe, devemos provar que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Ou equivalentemente,

$$\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a).$$

Dado $h \neq 0$, temos que

$$f(a+h) = f(a) + [f(a+h) - f(a)] = f(a) + \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.h$$

Tomando o limite quando h tende a zero, obtemos que

$$\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a) + \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h}\right] . \lim_{h \to 0} h = f(a) + f'(a).0 = f(a).$$

Isto conclui a prova do teorema. $\square$

Teorema 1.1.3 (Regra da Cadeia) *Sejam $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ deriváveis tal que $g([a,b]) \subset [c,d]$. Então, $f \circ g : [a,b] \to \mathbb{R}$ é derivável e*

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)).g'(x).$$

Demonstração: Vamos provar que $f \circ g$ é derivável em $x_0 \in (a, b)$. Devemos provar que o limite a seguir existe:

$$\lim_{h \to 0} \frac{(f \circ g)(x_0 + h) - (f \circ g)(x_0)}{h}.$$

De fato, podemos reescrever a igualdade acima

$$\frac{(f \circ g)(x_0 + h) - (f \circ g)(x_0)}{h} = \underbrace{\frac{f(g(x_0 + h)) - f(g(x_0))}{g(x_0 + h) - g(x_0)}}_{I} \cdot \underbrace{\frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}}_{II}.$$

Como g é contínua, então $g(x_0 + h) - g(x_0) \to 0$ quando $h \to 0$. Assim, I existe pois f é derivável e do mesmo modo II existe, pois g é derivável. Logo,

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)).g'(x).$$

Isto conclui a prova do teorema. □

1.2 Propriedades

Teorema 1.2.1 *Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivável com $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$. Então, a função f é estritamente crescente.*

Demonstração: De fato, como o limite $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ existe e é maior do que zero, então para h suficientemente pequeno, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} > 0$. Logo, se $h > 0$, então $f(x+h) > f(x)$ para todo $x \in (a, b)$. Se $h < 0$, então $f(x+h) < f(x)$ para todo $x \in (a, b)$. Segue que f é estritamente crescente. □

Um resultado análogo vale para $f'(x) < 0$, neste caso f será estritamente decrescente. Deixamos essa parte como exercício.

Sabemos que toda função estritamente crescente (ou decrescente) é injetora, assim restringindo f a sua imagem J, obtemos $f : (a, b) \to J$ bijetora.

Teorema 1.2.2 *Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivável tal que $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$. Então, a função inversa de f, aqui representada por g, existe e vale*

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

Demonstração: Como $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é estritamente crescente e portanto possui inversa. Este é um resultado que provamos. Seja g a sua inversa. Queremos provar que o limite abaixo existe

$$\lim_{k \to 0} \frac{g(y + k) - g(y)}{k}.$$

Pelo TVI, todo $y + k$, para k suficientemente pequeno, pode ser escrito como imagem de f. Seja $x = g(y)$ e $h = g(y + k) - g(y)$. Então,

$$x = g(y), \quad \text{e } g(y + k) = g(y) + h = x + h.$$

Logo, o quociente fica

$$\frac{g(y+k)-g(y)}{k} = \frac{h}{f(x+h)-f(x)} = \frac{1}{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}.$$

Quando $h \to 0$ temos que $k \to 0$. E reciprocamente, quando $k \to 0$, existe um único valor h tal que $f(x+h) = y+k$, pois f é invertível. Logo, $h \to 0$. Segue que

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

Análogo, para $f'(x) < 0$. Isto conclui a prova do teorema. □

Definição 1.2.3 *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$. Dizemos que x_0 é ponto de máximo absoluto de f em I, se $f(x) \leq f(x_0)$, para todo $x \in I$. Nesse caso, $f(x_0)$ é o valor máximo absoluto de f.*

Dizemos que x_0 é ponto de mínimo absoluto de f em I, se $f(x_0) \leq f(x)$, para todo $x \in I$. Nesse caso, $f(x_0)$ é o valor mínimo absoluto de f.

Definição 1.2.4 *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$. Dizemos que x_0 é ponto de máximo local de f em I, se existe um intervalo aberto $J \subset I$ tal que $f(x) \leq f(x_0)$, para todo $x \in J$. Nesse caso, $f(x_0)$ é um valor máximo local de f.*

Dizemos que x_0 é ponto de mínimo absoluto de f em I, se existe um intervalo aberto $J \subset I$ tal que $f(x_0) \leq f(x)$, para todo $x \in J$. Nesse caso, $f(x_0)$ é um valor mínimo local de f.

Máximos e mínimos absolutos também são chamados de extremos globais e máximos e mínimos locais são chamados de extremos locais. Na figura 1.2, vemos que máximo e mínimo globais ocorrem nos extremos do intervalo, e o máximo e o mínimo locais ocorrem no interior do intervalo; mas isso nem sempre é ocorre.

Teorema 1.2.5 *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e derivável em (a,b). Suponha que f assume seu valor máximo em $x_0 \in (a,b)$. Então, $f'(x_0) = 0$.*

Demonstração: De fato, como $f(x_0) \geq f(x), \forall x \in (a,b)$, e
$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe, então obtemos para $h > 0$ que $f'(x_0) \leq 0$. Se $h < 0$ obtemos que $f'(x_0) \geq 0$. Logo, $f'(x_0) = 0$. □

Observação 1.2.6 *Um resultado análogo vale quando f assume o seu mínimo em algum ponto do interior do domínio. Deixamos esssa parte como exercício.*

Resumindo: Se f assume máximo ou mínimo no interior de seu domínio, então a derivada se anula nesses pontos.

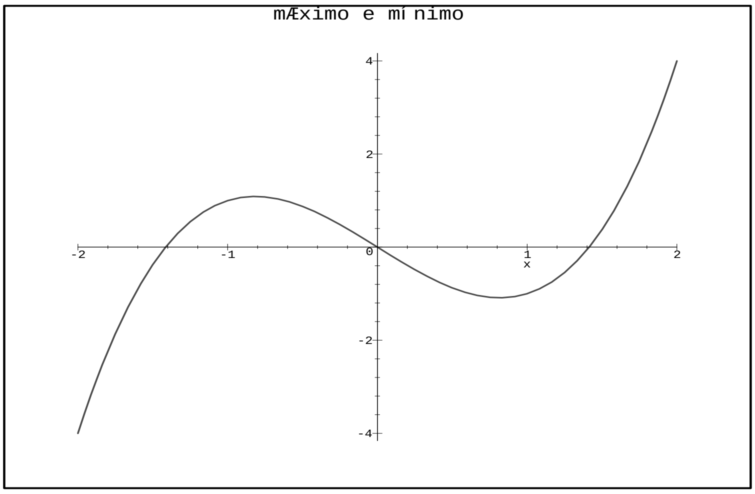
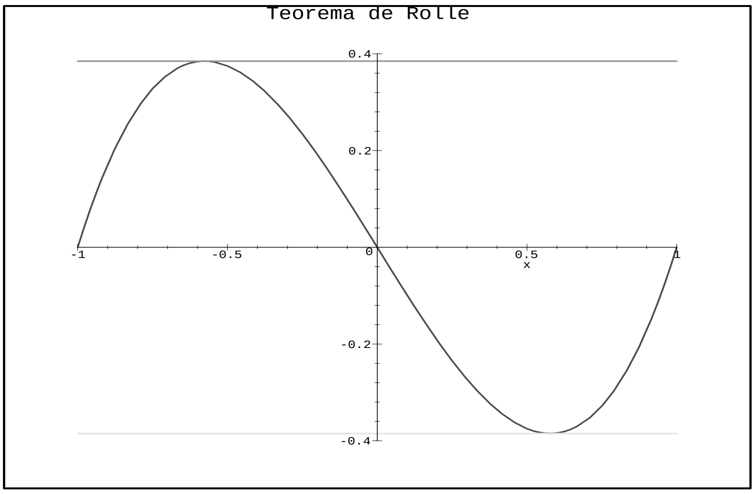


Figura 1.1: Máximos e Mínimos: diferenças

Definição 1.2.7 *Um ponto x_0 tal que $f'(x_0) = 0$ é chamado de ponto crítico de f.*

Como vimos acima no teorema 1.2.5, os pontos de máximo e mínimo locais de uma função são pontos críticos. Mas (isso é importante) existem pontos críticos que não são pontos de máximo ou mínimo locais.

Teorema 1.2.8 (Teorema de Rolle) *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e derivável em (a, b). Se $f(a) = f(b) = 0$, então existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f'(x_0) = 0$.*



Teorema de Rolle

Demonstração: Se $f(x) \equiv 0$, então não há o que provar. Se $f(x) \not\equiv 0$, então f deve ser ou positiva ou negativa em algum lugar. Suponha que f é positiva, pelo teorema do extremo, f assume o máximo em algum ponto x_0 de (a, b), portanto $f'(x_0) = 0$. Supondo que f seja negativa, aplicamos o teorema do extremo para o mínimo. $\square$

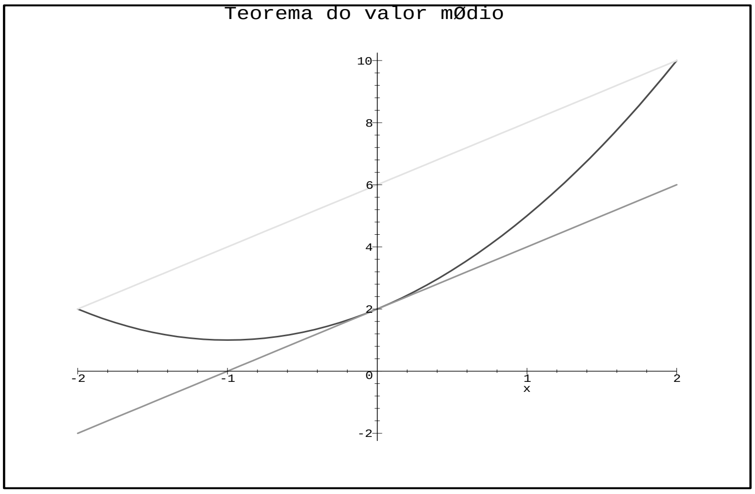
Outra versão do Teorema de Rolle é dada a seguir, onde a condição $f(a) = f(b) = 0$ é retirada.

Teorema 1.2.9 (Teorema de Rolle-II) *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e derivável em (a, b). Se $f(a) = f(b)$, então existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f'(x_0) = 0$.*

Demonstração: Suponha que $f(a) = f(b) = m$ e defina $g(x) = f(x) - m, \forall x \in [a, b]$. É claro que g é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Aplicando o Teorema de Rolle, segue que existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $g'(x_0) = 0$. Isto é, $f'(x_0) = 0$. $\square$

Teorema 1.2.10 (Valor Médio) *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e derivável em (a, b). Existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Teorema de Rolle

Demonstração: Seja g a função definida por

$$g(x) = f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right](x - a) - f(a), \forall x \in [a, b].$$

É claro que g tem as mesmas propriedades que f e $g(a) = g(b) = 0$. Assim, g satisfaza às condições do Teorema de Rolle, logo, existe $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$. Segue que $g'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. $\square$

Existe uma versão mais geral do Teoema de Rolle, que apresentamos a seguir.

Teorema 1.2.11 *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e n vezes derivável em (a, b). Se existem $x_0, x_1, \ldots, x_n$ pontos em $[a, b]$ tais que $f(x_i) = 0, i = 0, 1, \ldots, n$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f^{(n)}(c) = 0$.*

Corolário 1.2.12 *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e derivável em (a, b). Se $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é constante.*

Demonstração: De fato, sejam $x < y$ pontos em (a, b). Pelo Teorema do valor médio aplicado no intervalo (x, y), temos que

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = 0.$$

Logo, $f(x) = f(y)$ para quaiquer $x, y \in (a, b)$. Logo, f é constante. □

Corolário 1.2.13 *Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínuas e deriváveis em (a, b). Se $f'(x) = f'(x)$ para todo $x \in (a, b)$, então $f - g$ é constante.*

Demonstração: de fato, tome $h(x) = f(x) - g(x), \forall x \in [a, b]$. Segue que h é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Além disso, $h'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$. Logo, $h \equiv c$ para alguma constante e portanto, $f(x) - g(x) = c$. □

1.3 Teste da derivada segunda para máximos e mínimos

Teorema 1.3.1 *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$ e duas vezes derivável em (a, b). Seja $c \in (a, b)$ um ponto crítico de f.*
a) Se $f''(c) < 0$, então f tem um máximo local em $x = c$.
b) Se $f''(c) > 0$, então f tem um mínimo local em $x = c$.

Demonstração: Suponha que $f''(c) < 0$, então pela definição

$$f''(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(c + h) - f'(c)}{h} < 0.$$

Logo, tomando $h > 0$ obtemos que existe $\delta > 0$ tal que $f'(x) < 0$ para todo $x \in (c, c + \delta)$. Segue que f é decrescente em $(c, c + \delta)$.

Do mesmo modo, tomando $h < 0$ obtemos que existe $\delta' > 0$ tal que $f'(x) > 0$ para todo $x \in (c - \delta, c)$.Segue que f é crescente em $(c - \delta', c)$.

Portanto, f assume máximo local em $x = c$.

O ítem b) é análogo. □

2

Formas indeterminadas

O conjunto do números reais extendidos é o conjunto dos números reais acrescido de dois símbolos: $-\infty$ e $+\infty$. O conjunto dos números reais estendidos é ordenado como o conjunto dos números reais, sendo que $-\infty < r < \infty$ para qualquer real $r \in \mathbb{R}$.

Se x e y são reais, definimos:
$x + \infty = \infty + x = \infty$
$x - \infty = -\infty + x = -\infty$
$\infty + \infty = \infty$
$-\infty - \infty = -\infty$
$x\infty = \infty$, se $x > 0$
$x\infty = -\infty$, se $x < 0$
$\frac{\infty}{x} = \infty$, se $x > 0$
$\frac{\infty}{x} = -\infty$, se $x < 0$
$\frac{x}{\pm\infty} = 0$.

2.1 Introdução

São formas indeterminadas: $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$ e 1^{∞}.

A razão para isso é que não existe uma forma definitiva de determinarmos o valor. Essas indeterminações surgem da necessidade de calcular limites; sendo que um estudo mais aprofundado desses casos mostra que as indeterminações dão um coisa ou outra.

Por exemplo, vamos calcular o limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{10^{-n}}{10^{-n-2}}.$$

Vemos que tanto o numerador quanto o denominador tendem para zero. Então, teremos $\frac{0}{0}$. Mas,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{10^{-n}}{10^{-n-2}} = \lim_{n\to\infty} 10^{-n}10^{-n+2} = 10^{2}.$$

Por outro lado,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{10^{-n}}{10^{-n(1+\frac{1}{2})}} = \lim_{n\to\infty} 10^{\frac{n}{2}} = \infty.$$

2.2 A Regra de L´Hospital

Como $\frac{0}{0}$ é uma forma indeterminada, não é imediato calcular $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, onde $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = 0$.

Teorema 2.2.1 *Sejam f e g funções definidas e diriváveis em uma vizinhança V de a, onde a é algum número real extendido.*

Suponha que
(1) $g(x) \neq 0$ *para todo* x *da vizinhança* V*.*
(2) $g'(x) \neq 0$ *para todo* x *da vizinhança* V*.*
(3) $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = 0$*.*
(4) $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c$*, onde* c *é algum real extendido.*
Então, $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = c$*.*

A nossa demonstração desse teorema necessita do teorema do valor médio de Cauchy.

Teorema 2.2.2 (Valor médio de Cauchy) *Sejam* $F, G : [a, b] \to \mathbb{R}$ *funções contínuas e deriváveis em* (a, b) *com* $G'(x) \neq 0$ *para todo* $x \in (a, b)$*.*
Então, existe $c \in (a, b)$ *tal que*

$$\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)}.$$

Demonstração: Tomemos a função dada por

$$H(x) = [F(x) - F(a)]\,[G(b) - G(a)] - [F(b) - F(a)]\,[G(x) - G(a)]\,.$$

É fácil ver que H é contínua em $[a, b]$ e dirivável em (a, b). Além disso, $H(a) = H(b) = 0$. Pelo teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ tal que $H'(c) = 0$. Isto nos dá,

$$F'(c)\,[G(b) - G(a)] - [F(b) - F(a)]\,G'(c),$$

ou seja

$$\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)}.$$

□

Demonstração: (Teorema 2.2.1)
Seja b suficientemente pequeno de modo que $[a, b]$ esteja contido em V. Defina as funções

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \neq a \\ 0, & \text{se } x = a, \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} g(x), & \text{se } x \neq a \\ 0, & \text{se } x = a. \end{cases}$$

Segue que F e G são contínuas em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b), onde b é suficientemente pequeno de modo que $[a, b]$ esteja contido em V. Além disso, $G'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Pelo Teorema do valor médio de Cauchy, para cada $x \in (a, b)$, existe $a_x \in (a, b)$ tal que

$$\frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(a_x)}{G'(a_x)}.$$

Assim,

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)}=\lim_{x\to a^+}\frac{F'(a_x)}{G'(a_x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(a_x)}{g'(a_x)}=c,$$

pois $a_x \to a$ quando $x \to a$.

Isto mostra que o limite lateral à direita é o esperado. De modo análogo, fazemos com o limite lateral à esquerda. Isto conclui a prova do teorema. $\square$

Observação 2.2.3

A regra de L´Hopital também vale para $\frac{\infty}{\infty}$ e para limites laterais.

• **Exemplo 2.2.4**

1. Determine $\lim_{x\to\infty}(x-\ln x)$. Diretamente, obtemos $\infty-\infty$. Vamos usar L´Hosptial.

Seja $y = x - \ln x$. Então, $e^y = \frac{e^x}{x}$. Tomando $x \to \infty$, obtemos $\lim_{x\to\infty} e^y = \infty$. Logo, $y \to \infty$, e portanto $\lim_{x\to\infty}(x - \ln x) = \infty$.

2. Determine o limite $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$. Note que diretamente, obtemos 1^∞.

Seja $y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$. Aplicando ln obtemos

$$\ln y = x\ln(1+\frac{1}{x}) = \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}.$$

Agora, calculando o limite diretamente, obtemos $\frac{0}{0}$. Vamos usar a regra de L´Hospital. Assim, temos

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1.$$

Como $\ln y \to 1$ quando $x \to \infty$, então $y \to e$ quando $x \to \infty$. Logo, temos que

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$