Propriedades das Funções Contínuas

Prof. Doherty Andrade

2005

Sumário

1 Propriedades das Funções Contínuas

As funções contínuas possuem inúmeras propriedades importantes. Vamos estudar aqui as propriedades mais elementares. No momento, ainda não temos maturidade para estudar algumas delas, mas devemos insistir para adquirir essa maturidade.

Em todo esse texto admitiremos o seguinte axioma:

Axioma 1 (Completude do conjunto dos reais) *Todo subconjunto dos reais limitado superiormente admite um supremo.*

Desse axioma, concluímos que todo subconjunto dos reais limitado inferiormente admite um ínfimo.

2 Continuidade

Definição 2.1 [1] *Seja $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é contínua em $a \in X$ quando*

$$\forall \epsilon > 0, \;\; \exists \delta > 0; |x - a| < \delta, x \in X \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Ou equivalentemente, conforme provaremos mais tarde, dizemos que f é contínua em a quando
a) f está definida em a, e
b) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

• **Exemplo 2.2**

a) Se $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é linear ou afim, então é contínua em todos os pontos do domínio.
b) Dizemos que $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é Lipschitziana se existe $K \geq 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|,$$

para todo par $x, y \in X$. Toda função Lipschitziana é contínua.

Demonstre isso.

[1] aqui supõe-se implicitamente que $a \in X$ seja um ponto de acumulação de X.

Teorema 2.3 (Construção de funções contínuas) *Sejam $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in X$. Se f e g são contínuas em a, então valem:*
a) kf é contínua em a
b) $(f+g)$ é contínua em a
c) $f.g$ é contínua em a
d) Se $g(a) \neq 0$, então $\dfrac{f}{g}$ é contínua em a.

Teorema 2.4 (Continuidade da função composta) *Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $Y \subset \mathbb{R}$, e $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : Y \to \mathbb{R}$ funções. Suponha que $f(X) \subset Y$ e assim $(g \circ f)$ está definida em X. Se f em contínua em $a \in X$ e g contínua em $b = f(a)$, então $(g \circ f)$ é contínua em $a \in X$.*

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$, devemos provar que existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $|x - a| < \delta$ implica que

$$|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)| < \epsilon.$$

Como g é contínua em $b = f(a)$ existe $\gamma > 0$ tal que para $y \in Y$ e $|y - b| < \gamma$ tem-se

$$|g(y) - g(b)| < \epsilon.$$

Como f é contínua em a existe, para $\gamma > 0$ dado, um $\delta > 0$ tal que para $x \in X$ e $|x - a| < \delta$ tem-se

$$|f(x) - f(a)| < \gamma.$$

Logo,

$$|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)| < \epsilon,$$

que é o que queríamos. □

3 Propriedades

Definição 3.1 *Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. Dizemos que a é um ponto aderente a X se existe uma sequência (x_n) de pontos de X que converge para a. Dizemos que o conjunto X é fechado se contém todos os seus pontos de aderência.*

Dessa definição, concluímos que se X é fechado e $a \in X$, então existe uma sequência (x_n) de elementos de X tal que $x_n \to a$.

Ao conjunto de todos os pontos de aderência de X chamamos de o fecho de X e denotamos por $\overline{X}$. Note que todo ponto de acumulação de X é também um ponto de aderência de X.

Um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ é dito compacto, se for limitado e fechado. Os intervalos $[a, b]$ são conjuntos compactos de $\mathbb{R}$.

Teorema 3.2 *Seja $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Então, f é contínua em a se, e somente se, para toda sequência $(x_k) \in X$ tal que $x_k \to a$ tem-se $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(a)$.*

Demonstração: $\Longrightarrow$] Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap X$ tem-se $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Como $\lim x_n = a$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in (a - \delta, a + \delta) \cap X$, para todo $n > n_0$. Logo,

$$|f(x_n) - f(a)| < \epsilon, \ \forall n > n_0.$$

Isto é , $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(a)$.

$\Longleftarrow$] Reciprocamente, se f não é contínua em a, então existe $\epsilon > 0$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ podemos obter $x_k \in X$ com $|x_k - a| < \frac{1}{k}$ e $|f(x_k) - f(a)| \geq \epsilon$. Então, temos $x_k \to a$ sem que $\lim f(x_k) = f(a)$. O que é absurdo. □

O teorema acima nos diz que uma função é contínua se, e somente se, leva sequências convergentes em sequências convergentes.

Um intervalo compacto é um intervalo limitado e fechado $I = [a, b]$. Uma sequência de intervalos compactos I_k é dita encaixada se $I_{k+1} \subseteq I_k$, para todo k natural. O próximo resultado, é uma importante ferramenta muito utilizada na prova de outros resultados.

Teorema 3.3 (Intervalos encaixados) *Seja (S_k) uma sequência de intervalos compactos encaixados de $\mathbb{R}$. Então , a interseção deles é não vazia, isto é,*

$$\cap_{k=1}^{\infty} S_k \neq \emptyset.$$

Demonstração: Seja (I_k) uma sequência de intervalos compactos $I_k = [a_k, b_k]$. Sejam

$$\begin{aligned} A &= \{a_k, k \in \mathbb{N}\} \\ B &= \{b_k, k \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Como a sequência é encaixada cada elemento de B é um limite superior para A. Seja $a = \sup A$, (estamos admitindo que todo subconjunto limitado superiormente dos reais admite um supremo) então $a_k \le a \le b_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Segue que $a \in I_k,\ \forall k \in \mathbb{N}$, provando que a interseção é não vazia. $\square$

Como aplicação podemos agora provar que $\mathbb{R}$ é não enumerável.

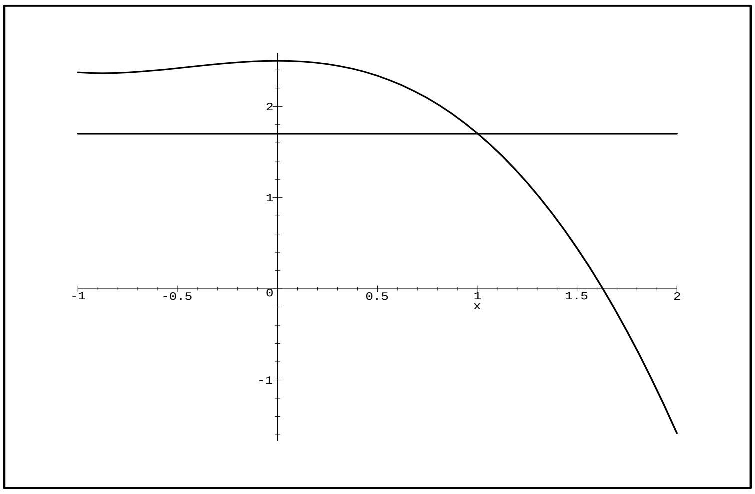
Corolário 3.4 $\mathbb{R}$ *é não enumerável.*

Demonstração: Basta provar que $[0,1]$ é não enumerável. Se fosse enumerável, tomaríamos $f : \mathbb{N} \to [0,1]$ sobrejetora, então $f(1)$ não está em pelo menos um dos intervalos $[0,1/3]$, $[1/3,2/3]$, $[2/3,1]$. Seja I_1 este intervalo. Quebrando este intervalo em três outros subintervalos congruentes, pelo menos um deles não contém $f(2)$. Denote este intervalo por I_2. Continuando desta maneira, obtemos uma sequência de intervalos compactos encaixados (I_k) tal que $f(k) \in I_k^c$, $\forall k \in \mathbb{N}$, onde I_k^c é o complementar de I_k. Segue que

$$f(\mathbb{N}) \subset \cup_{k=1}^{\infty} I_k^c = (\cap_{k=1}^{\infty} I_k)^c.$$

Isto contradiz a hipótese que f é sobrejetora porque a interseção da sequência (I_k) é não vazia. $\square$

Teorema 3.5 (Teorema do valor intermediário) *Seja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *contínua. Seja* $d \in \mathbb{R}$ *tal que* $f(a) < d < f(b)$*. Então, existe* $c \in (a,b)$ *tal que* $f(c) = d$*.*



Demonstração: Seja $g(x) = f(x) - d, x \in [a, b]$. É claro que g é contínua, $g(a) < 0$ e $g(b) > 0$. Sejam $a_1 = a$, $b_1 = b$ e $m_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Notemos que $g(m_1)$ ou é igual a 0, ou maior do que 0 ou é menor do que 0. Se for igual a 0, então tomamos $c = m_1$ e a prova está terminada.

Se $g(m_1) > 0$, defina $a_2 = a_1$ e $b_2 = m_1$. Se $g(m_1) < 0$, então defina $a_2 = m_1$ e $b_2 = b_1$. Em cada caso, temos $g(a_2) < 0$ e $f(b_2) > 0$. Novamente seja $m_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$. Calcule $g(m_2)$. Se $g(m_2)$ valor for igual a 0, o resultado está provado com $c = m_2$. Se $g(m_2) > 0$ seja $a_3 = a_2$ e $b_3 = m_2$. Se $g(m_2) < 0$ seja $a_3 = m_2$ e $b_3 = b_2$. De novo, em cada caso, $g(a_3) < 0$ e $g(b_3) > 0$.

Continuando dessa maneira, ou encontramos uma solução após um número finito de passos ou encontramos uma sequência $[a_n, b_n]$ de intervalos compactos encaixados tal que

$$b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}, \;\; g(a_n) < 0, \;\; g(b_n) > 0.$$

Segue do Teorema dos intervalos encaixados segue que existe $c \in (a, b)$ tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = c = \lim_{n\to\infty} b_n$. Do Teorema 3.2 segue que $g(a_n) \to g(c)$ e $g(b_n) \to g(c)$.

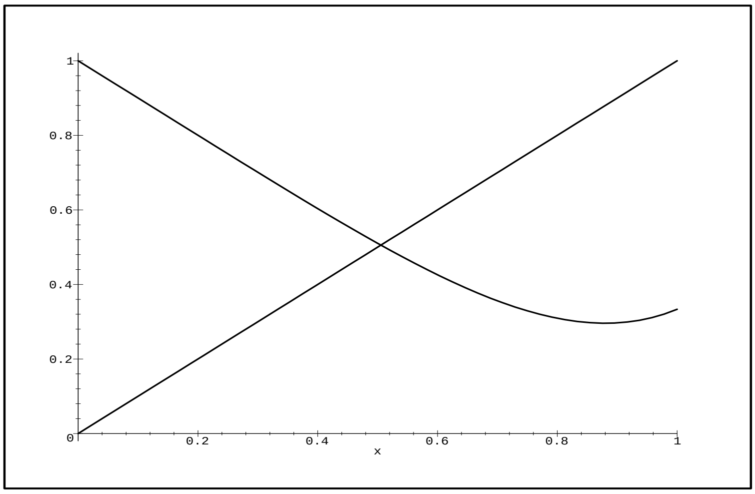
Como $g(c) \leq 0 \leq g(c)$ segue que $g(c) = 0$ e portanto $f(c) = d$. □

O seguinte teorema é um resultado simples sobre existência de ponto fixo.

Teorema 3.6 *Toda aplicação contínua $f : [a, b] \to [a, b]$ tem pelo menos um ponto fixo.*

Demonstração: Defina a seguinte aplicação $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(x) - x$. Assim g mede a distância orientada entre x e sua imagem $f(x)$. Um ponto fixo de f é um ponto x onde $g(x) = 0$. Se um dos extremos do intervalo é ponto fixo nada temos a provar. Então suponha que nenhum deles seja ponto fixo. Como $f(a)$ e $f(b)$ estão no intervalo $[a, b]$ segue que $a < f(a)$ e $f(b) < b$ e portanto $g(a) > 0$ e $g(b) < 0$. Como g é contínua, existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $g(x_0) = 0$ e portanto $f(x_0) = x_0$. □

O teorema acima pode ser visualizado no gráfico.



O ponto fixo ocorre onde $y = x$ e $f(x)$ se cruzam.

Teorema 3.7 *Toda aplicação contínua de um círculo C na reta tem um par de pontos diametralmente opostos com mesma imagem.*

Demonstração: Seja $f : C \to \mathbb{R}$ uma aplicação contínua do círculo C na reta $\mathbb{R}$. Se x e x' são pontos diametralmente opostos sobre C, defina $g : C \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(x) - f(x')$. Como f é contínua, então g também é. Além disso,

$$g(x') = f(x') - f(x) = -(f(x) - f(x')) = -g(x).$$

Segue que g tem sinais opostos em x e em x' ou é zero em x e x'. Se $g(x) = 0$, então $f(x) = f(x')$. No outro caso, como g é contínua existe um ponto x_0 tal $g(x_0) = 0$, isto é, $f(x_0) = f(x_0')$. $\square$

O mesmo resultado vale para a esfera. Prove isto. Tomando a Terra como uma esfera, e a função como temperatura, então em cada instante, existem pontos diamentralmente opostos na terra com a mesma temperatura.

Teorema 3.8 *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ contínua não constante. Então, $f(I)$ é um intervalo.*

Demonstração: Lembramos que um conjunto $S \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, se e somente, se satistaz às seguintes propriedades:

i) S contém mais do que um ponto;

2i) se $x_1, x_2 \in S$ e x está entre x_1 e x_2, então $x \in S$.

Vamos provar que $f(I)$ satisfaz às propriedades acima.

Como f não é constante, sua imagem $f(I)$ tem mais que um ponto. Sejam $y_1, y_2 \in f(I)$. Segue que existem $x_1, x_2 \in I$ tais que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$. Suponha, para fixar as idéias que $x_1 < x_2$. Como f é contínua em $[x_1, x_2]$ podemos aplicar o teorema do valor intermediário, assim dado $y \in (y_1, y_2)$ existe $x \in (x_1, x_2)$ tal que $f(x) = y$. Verificando que $f(I)$ satisfaz à segunda condição. Logo, $f(I)$ é um intervalo. $\square$

O teorema de Bolzano-Weierstrass é um dos mais importantes resultados da Análise real.

Teorema 3.9 (Bolzano-Weierstrass) *Todo conjunto infinito limitado E do $\mathbb{R}$ tem um ponto de acumulação.*

Demonstração: Como E é limitado, então está contido em algum intervalo compacto S. O intervalo S pode ser coberto por um número finito de subintervalo onde cada um deles tem dimensão igual a metade da dimensão de S. Pelo menos um desses subintervalos contém um subconjunto infinito E_1 de E. Seja S_1 este subintervalo contendo E_1. Repetindo o processo com o conjunto infinito e limitado E_1 obtemos um subintervalo S_2 de dimensões igual a metade das dimenões de S_1 e que contém um subconjunto infinito E_2 de E_1. Seguindo este procedimento construímos uma sequência (S_k) de subintervalos compactos onde cada um contém um subconjunto infinito. Pelo teorema dos retângulos encaixados existe um elemento $a \in S_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Seja B a bola de centro a e raio $\epsilon > 0$ qualquer. Como as dimensões de cada S_k é 2^{-k} vezes as dimensões de S, então S_k estará dentro de B para k suficientemente grande. Assim, B contém um conjunto infinito de E e portanto a é um ponto de acumulação. $\square$

Teorema 3.10 *Seja $X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Se $K \subset X$ é compacto, então $f(K)$ é compacto.*

Demonstração: Primeiramente vamos provar que $f(K)$ é fechado. Seja $y \in \overline{f(K)}$. Então, $y = \lim y_k$, onde $y_k \in f(K)$. Logo, $y_k = f(x_k)$, onde $x_k \in K$. Como (x_k) é limitada, existe subsequência (x_{k_n}) tal que $x_{k_n} \to x \in K$. Logo,

$$y = \lim f(x_{k_n}) = f(x)$$

e assim, $y \in f(K)$.

Agora provaremos que $f(K)$ é limitado. De fato, se não fosse limitado, obteríamos uma sequência (x_k) de elementos de K tal que $f(x_k) > k$. Logo, $(f(x_k))$ não admite subsequência convergente. Mas (x_k) tem subsequência convergente e $\lim x_k = x \in K$. Pela continuidade de f, temos

$$\lim f(x_{k_i}) = f(\lim x_{k_i}) = f(x),$$

uma contradição. □

Corolário 3.11 *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Então, $f(I)$ é um intervalo compacto.*

Demonstração: Já provamos que $f(I)$ é um intervalo e no teorema acima $f(I)$ compacto. Logo, $f([a,b]) = [c,d]$, para algum intervalo $[a,d]$. □

Como caso particular do Teorema 3.10, temos o seguinte resultado importante em otimização de funções reais.

Teorema 3.12 *Seja K um conjunto compacto de $\mathbb{R}$ e $f : K \to \mathbb{R}$ contínua. Então , f assume valores máximo e mínimo sobre o conjunto K, isto é, existem x_0 e $x_1 \in K$ tais que $f(x_0) \le f(x) \le f(x_1), \forall x \in K$.*

Demonstração: Sabemos que $f(K)$ é compacto e portanto é limitado e fechado. Como $f(K) \subset \mathbb{R}$ é fechado e limitado superiormente, então tem um máximo. Do mesmo modo $f(K)$ tem um mínimo. Então, existem x_0 e x_1 elementos de K tais que $f(x_0) \le f(x) \le f(x_1)$. □

4 Continuidade Uniforme

Definição 4.1 *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é uniformemente contínua sobre X se para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|x-y| < \delta$ e $x, y \in X$, então*

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

A definição diz que o mesmo δ serve para cada par de pontos $x, y \in X$.

Teorema 4.2 *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, f é uniformemente contínua sobre $[a,b]$.*

Demonstração: A prova é por contradição. Se f não é uniformemente contínua sobre $[a, b]$, existe $\epsilon > 0$ para o qual não existe $\delta > 0$ com a propriedade $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$ para todos os pares $x_1, x_2 \in [a, b]$ com $|x_1 - x_2| < \delta$. Então, para cada $\delta = \frac{1}{n}$ exite um par de pontos $x_{1,n}, x_{2,n}$ de $[a, b]$ tal que

$$|x_{1,n} - x_{2,n}| < \frac{1}{n}, \quad \text{e} \quad |f(x_{1,n}) - f(x_{2,n})| \geq \epsilon. \tag{1}$$

Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, o conjunto $S = \{x_{1,n}, x_{2,n}, n \in \mathbb{N}\}$ tem uma subsequência (x_{1,n_k}) convergente para $x_0 \in [a, b]$.

Como $|x_{1,n_k} - x_{2,n_k}| < \frac{1}{k_n}$ segue que $x_{2,n_k} \to x_0$.

Como f é contínua temos que $f(x_{1,n_k}) \to f(x_0)$ e $f(x_{2,n_k}) \to f(x_0)$. Assim, existe natural n_0 tal que se $n \geq n_0$ então

$$|f(x_{1,n_k}) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2},$$

$$|f(x_{2,n_k}) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Logo,

$$|f(x_{1,n_k}) - f(x_{1,n_k})| \leq |f(x_{2,n_k}) - f(x_0)| + |f(x_{1,n_k}) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

O que contradiz (1). □

5 Exercício

1. Use o teorema do valor intermediário para provar que para cada $n \geq 1$ e $d > 0$ a equação $x^n = d$ tem uma solução.

2. A função $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 - x^2$ é contínua. Portanto, assume máximo e mínimo. Determine esses pontos.

3. Mostre que a função $g(x) = x^3 + 2x.\forall x \in \mathbb{R}$, é estritamente crescente e conclua que possui inversa.

4. Verifique que a função $f(x) = x^2 + x - 1$ possui um ponto fixo.

5. Mostre que a função $g(x) = \sin(x), \forall x \in \mathbb{R}$ é uniformemente contínua. Sugestão: use que $\sin(a) - \sin(b) = 2\sin(\frac{a-b}{2})\cos(\frac{a+b}{2})$.