Ministerio da Educação
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
Campus Campo Mourão

NOTAS DE AULA DE
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

Angela Mognon

2013

Sumário

Apresentação

A motivação ao preparo destas notas inicialmente foi facilitar e agilizar a apresentação dos conteúdos em sala de aula. Logo, este material foi elaborado com o intuito de proporcionar ao aluno um melhor acompanhamento da aula e consiste somente de algumas anotações, embasadas nas referências apresentadas, para serem utilizadas durante as aulas. Sem preocupações em copiar definições e enunciados espera-se que o aluno possa se concentrar nas demonstrações e resolucão de exemplos e exercícios que serão feitas em sala.

Agradeço à professora Sara Coelho da Silva pela parceria que resultou na primeira versão destas notas, feita no ano de 2009, quando ministravamos aulas de Cálculo Diferencial e Integral I a alunos dos primeiros anos de Engenharia da UTFPR/Campo Mourão. Com esta parceria tive total apoio na digitalização textual e gráfica, nas leituras pre-liminares, na escolha das referências, na organização dos conteúdos e na revisão dos textos. Agradeço também ao apoio e incentivo do professor Doherty Andrade, pois seu incentivo e orientação na utilização do sistema TeX e do software Geogebra tornou possível a digitalização destas notas.

Agradeço à professora Michele Carvalho de Barros pela parceria durante o primeiro e segundo semestre de 2010 quando foram feitas algumas modifcações na parte gráfica e foi acrescentada a parte de integrais trigonométrica e integrais por substituição trigonométrica.

A partir de 2011, além de alguns exercícios, foi acrescentado o texto referente às funções cotangente, secante, cossecante, funções trigonométricas inversas, funções hiperbólicas e os exemplos referente às translações, dilatações e compressões da função seno foram modificados para facilitar o entendimento dos alunos e, com auxílio de software GeoGebra, as figuras do capítulo de derivadas foram refeitas. O material foi reorganizado, inserindo as listas de exercícios ao final de cada capítulo, resutando assim na versão atual.

No capítulo 1, apresentamos o conjunto dos números reais e suas propriedades, desigualdades, inequações e valor asboluto. No capítulo 2 são apresentadas as funções reais de variáveis reais. No capítulo 3 apresentamos a noção intuitiva do conceito de limite e continuidade de uma função real de variável real e suas propriedades. No capítulo 4 apresentamos o conceito de derivada de uma função real de variável real, os teoremas sobre derivação e aplicações da derivada e no capítulo 5 apresentamos o conceito de integral, primeiramente trataremos das integrais indefinidas e em seguida apresentamos a integral definida e sua aplicação no cálculo de áreas de figuras planas .

Sugestões de melhorias e correções são bem-vindas e desde já agradecidas.

Angela Mognon

Campo Mourão, 2013.

Capítulo 1

Números Reais

1.1 Sistematização dos Conjuntos Numéricos

O conjunto dos números reais é formado por subconjuntos especiais. O primeiro subconjunto dos números reais que se faz presente em nosso dia a dia é o conjunto dos ***inteiros positivos*** ou ***naturais***. Ou seja, o conjunto

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}.$$

Os números -1, -2, -3, ... são chamados ***inteiros negativos***. A união do conjunto dos números naturais com os inteiros negativos e o zero (0) define o conjunto dos ***números inteiros*** que representamos por

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}.$$

Os números da forma $\frac{m}{n}, n \neq 0, m, n \in \mathbb{Z}$, formam o conjunto dos ***números racionais***, o qual representaremos por

$$\mathbb{Q} = \{x | x = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}.$$

Observemos que todo número racional pode ser representado sob a forma decimal. Temos dois casos:

• **Decimal finita**

Por exemplo: $\dfrac{3}{4} = 0,75$ $\qquad \dfrac{1}{2} = 0,5$ $\qquad \dfrac{-3}{5} = -0,6$

Observe que um número racional terá representação decimal finita se, e somente se o denominador contiver os fatores primos 2 e/ou 5.

• **Decimal infinita periódica (dízima periódica)**

Por exemplo: $\dfrac{1}{3} = 0,3333...$ $\qquad \dfrac{47}{90} = 0,5222...$ $\qquad \dfrac{3}{22} = 0,13636...$

Observe que se o denominador contiver algum fator primo diferente de 2 e 5 o racional terá representação decimal periódica.

Os números que não podem ser representados na forma $\dfrac{m}{n}, m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$, tais como $\sqrt{2} \cong 1,414...$, $\pi \cong 3,14159...$, $e \cong 2,71...$ formam o conjunto dos ***números irracionais***, denotado por $\mathbb{I}$.

A união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais forma o conjunto dos ***números reais,*** represenado por

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

Observação 1.1 *Outras notações:*

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ $\qquad \mathbb{R}^*_+ =$ *reais positivos* $\qquad \mathbb{R}_+ =$ *reais não negativos*

$\mathbb{R}^*_- =$ *reais negativos* $\qquad \mathbb{R}_- =$ *reais não positivos*

1.2 Os Números Reais e suas Propriedades

Apresentaremos a seguir os axiomas (a palavra axioma é usada para indicar uma afirmação formal considerada verdadeira, dispensando provas), definições e propriedades referentes ao conjunto dos números reais.

Operações em $\mathbb{R}$ e suas propriedades

No conjunto dos números reais são definidas duas operações, chamadas adição e multiplicação que satisfazem os axiomas abaixo:

A1) *Fechamento:* $\forall\ a, b \in \mathbb{R}, \exists!$ número real denotado por $a+b$, chamado **soma** e $\exists!$ número real denotado por $a.b$, chamado **produto**.

A2) *Comutatividade:* $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$ têm-se: $\begin{cases} a+b=b+a \\ a.b=b.a \end{cases}$

A3) *Associatividade:* $\forall\ a, b, c \in \mathbb{R}$ têm-se: $\begin{cases} (a+b)+c=a+(b+c) \\ (a.b).c=a.(b.c) \end{cases}$

A4) *Distributividade:* $\forall\ a, b, c \in \mathbb{R}$ têm-se: $a.(b+c)=a.b+a.c$

A5) *Existência de Elementos Neutros*: existem números reais 0 e 1 tais que:

$$\begin{cases} a+0=a \\ 1.a=a \end{cases},\ \forall\ a \in \mathbb{R}.$$

A6) *Existência do Elemento Simétrico*: todo $a \in \mathbb{R}$ tem um único simétrico real, denotado por $-a$, tal que $a+(-a)=0$.

A7) *Existência do Elemento Inverso*: todo $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ tem um único inverso real, denotado por $\dfrac{1}{a}$, tal que $\dfrac{1}{a}.a=1$.

Observação 1.2 *Usando A6 e A7 podemos definir a* ***subtração*** *e a* ***divisão*** *por números reais:*

subtração: $a-b=a+(-b)$
divisão: $\dfrac{a}{b}=a.\dfrac{1}{b}$

1.3 Desigualdades e a Ordem em $\mathbb{R}$

Para podermos comparar um número real com outro e estabelecer uma ordem (maior ou menor do que), devemos introduzir o conceito de número real positivo e uma relação de ordem em $\mathbb{R}$.

Axioma da Ordem:

(i) Se $a \in \mathbb{R}$, exatamente uma das três afirmações ocorre:

$a = 0$ ou a é positivo ou $(-a)$ é positivo;

(ii) $a, b \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow a + b \in \mathbb{R}_+^*$;

(iii) $a, b \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow a.b \in \mathbb{R}_+^*$.

Definiremos a seguir os símbolos $<$ (menor que), $>$ (maior que), $\leq$ (menor do que ou igual a) e $\geq$ (maior do que ou igual a).

Definição 1.1 *Se $a, b \in R$,*

(i) a é negativo se, e somente se, $-a \in \mathbb{R}_+^*$.

(ii) $a < b \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{R}_+^*$.

(iii) $a > b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{R}_+^*$.

Pergunta: Como caracterizar $a > 0$ como número positivo e $a < 0$ como número negativo?

Definição 1.2 *Se $a, b \in R$,*

(i) $a \leq b \Leftrightarrow a < b$ ou $a = b$.

(ii) $a \geq b \Leftrightarrow a > b$ ou $a = b$.

Observação 1.3 *As afirmações $a < b, a > b, a \leq b$ e $a \geq b$ são chamadas desigualdades. As desigualdades $a < b$ e $a > b$ são chamadas de desigualdades estritas, enquanto que $a \leq b$ e $a \geq b$ são chamadas desigualdades não-estritas.*

Propriedades da Relação de Ordem $<$:

Se $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ temos:

1. Se $a > 0$ e $b > 0$ então $a + b > 0$ e $a.b > 0$.
2. $a < b$ e $b < c \Rightarrow a < c$.
3. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$.
4. $a < b$ e $c > 0 \Rightarrow ac < bc$.
5. $a < b$ e $c < 0 \Rightarrow ac > bc$.
6. $a < b$ e $c < d \Rightarrow a + c < b + d$.
7. $a > b > 0$ e $c > d > 0 \Rightarrow ac > bd$.

1.4 A Reta Real

É possível associar os números reais aos pontos de uma reta r de tal modo que a cada número real a corresponda um único ponto, e reciprocamente, a cada ponto $P \in r$ corresponda precisamente um único número real. Tal associação chama-se **correspondência biunívoca** entre a reta r e o conjunto dos números reais. Escolhemos inicialmente um número arbitrário O chamado **origem,** e a ele associamos o número real 0 (zero).

O número a associado ao ponto A de r é chamado **coordenada de** A. A reta r é chamada de **reta real**. Pode-se orientar r tomando-se como sentido positivo o sentido à direita, e como sentido negativo o sentido à esquerda da origem. Indica-se o sentido positivo por meio de uma seta em r.

Os números reais correspondentes a pontos à direita da origem chamam-se números **reais positivos**, e os que correspondem a pontos a esquerda de O, são os números **reais negativos**. O número real 0 (zero) não é nem positivo nem negativo.

Geometricamente, $a < b$ se, e somente se, a está à esquerda de b na reta real. Analogamente, $a > b$ se, e somente se, a esta à direita de b na reta real.

Intervalos Reais

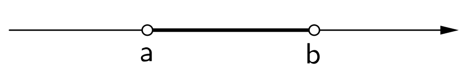
Os **intervalos** são subconjuntos de números reais. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$. Definimos:

• **Intervalo aberto**

É o conjunto dos números reais entre a e b (excluídos os extremos a e b), denotado por $]a, b[$, isto é:

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}.$$

Geometricamente:

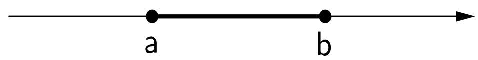


• **Intervalo fechado**

É o conjunto dos números reais entre a e b (incluídos os extremos a e b), denotado por $[a, b]$, isto é:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}.$$

Geometricamente:

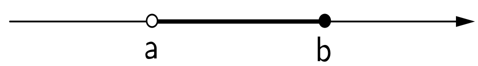


• **Intervalo semi-aberto à esquerda**

É o conjunto dos números reais entre a e b (exluindo a e incluindo b), denotado por $]a, b]$, isto é:

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}.$$

Geometricamente:

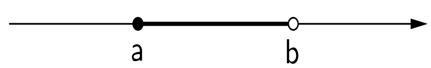


• **Intervalo semi-aberto à direita**

É o conjunto dos números reais entre a e b (incluindo a e excluindo b), denotado por $[a, b[$, isto é:

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}.$$

Geometricamente:

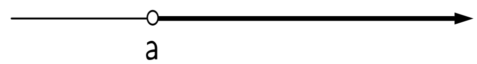


• **Intervalos Ilimitados**

Usaremos os símbolos $+\infty$ (infinito positivo) e $-\infty$ (infinito negativo) para representar os seguintes intervalos:

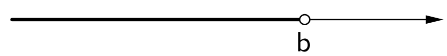
$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} | x > a\}$$

Geometricamente:



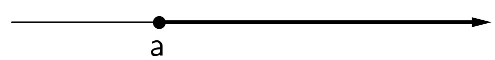
$$]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} | x < b\}$$

Geometricamente:



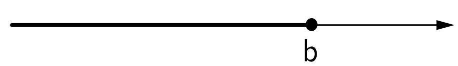
$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\}$$

Geometricamente:



$$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq b\}$$

Geometricamente:



$$]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$$

Geometricamente:

1.5 Inequações em $\mathbb{R}$

Ocorrem com frequência, no cálculo, desigualdades que envolvem variáveis. Tais desigualdades são ditas **inequações**. Dada uma inequação em x, dizemos que a é **solução da inequação** se obtemos uma afirmação verdadeira quando se substitui x por a, ou seja, a "satisfaz" a desigualdade. Resolver uma inequação é determinar todas as suas soluções, ou seja, determinar o conjunto de números que satisfaça a desigualdade em questão. Este conjunto é dito **conjunto-solução** S e é interpretado geometricamente por intervalos da reta. Veja a seguir alguns exemplos de inequações com variável real, ou seja inequações em $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.1 *Determine e represente na reta numérica o conjunto-solução das seguintes inequações:*

1. $2 + 3x < 5x + 8$

2. $3 + 7x < 8x + 9$

3. $4x + 3 > 2x - 5$

4. $7 < 5x + 3 \leq 9$

5. $-5 < \dfrac{4 - 3x}{2} < 1$

1.6 Módulo ou Valor Absoluto de um Número Real

Definição 1.3 *O valor absoluto de a (ou o módulo de a), denotado por $|a|$, é dado por:*

$$|a| = \begin{cases} a, & se\ \ a \geq 0 \\ -a, & se\ \ a < 0 \end{cases}$$

Geometricamente, o módulo de a representa a distância entre a e 0.

Observação 1.4

1) $|a| \geq 0$ *e* $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$;

2) $|a| = |-a|$;

3) $|a| = \sqrt{a^2}$

Propriedades do Módulo de um Número Real

i) $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$ para todo $a > 0$;

ii) $|x| > a \Leftrightarrow x > a$ ou $x < -a$ para $a > 0$;

iii) $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow |a.b| = |a|.|b|$;

iv) $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0 \Rightarrow |\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$;

v) $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow |a + b| \leq |a| + |b|$;

vi) $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow |a - b| \leq |a| + |b|$;

vii) $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow |a| - |b| \leq |a - b|$.

Equações e Inequações Modulares

Equações e inequações modulares são igualdades ou desigualdades que envolvem módulos de expressões com variáveis.

Exemplo 1.2 *Determine e represente na reta numérica o conjunto-solução das seguintes equações e inequações modulares:*

1. $|3x + 2| = 5$

2. $|x-5|=-3$

3. $|7x-2|<4$

4. $|7x-2|>4$

Exercícios - Capítulo 1

Exercício 1.1 *Determine e represente na reta numérica o conjunto-solução das seguintes inequações:*

1) $5x + 2 > x - 6$

2) $3 - x < 5 + 3x$

3) $\dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{2} \leq 0$

4) $3 - 2x \geq 9 + 4x$

5) $13 \geq 2x - 3 \geq 5$

6) $-2 < 6 - 4x \leq 8$

7) $2 > -3 - 3x \geq -7$

8) $2 \leq 5 - 3x < 11$

9) $3 \leq \dfrac{2x-3}{5} < 7$

10) $-5 \leq \dfrac{4-3x}{2} < 1$

11) $3(x-4) + 1 \geq 2x - 12$

12) $2(x-2) + 3 < 5(x+1)$

Exercício 1.2 *Determine e represente na reta numérica o conjunto-solução das seguintes equações modulares:*

1) $|4x + 3| = 7$

2) $|3x - 8| = 4$

3) $|5x - 3| = |3x + 5|$

4) $|x - 2| = |3 - 2x|$

5) $|7x| = 4 - x$

6) $2x + 3 = |4x + 5|$

7) $\left|\dfrac{x+2}{x-2}\right| = 2$

8) $\left|\dfrac{3x+8}{2x-3}\right| = 4$

9) $|x|^2 - 3|x| + 2 = 0$

Exercício 1.3 *Determine e represente na reta numérica o conjunto-solução das seguintes inequações modulares:*

1) $|x + 4| < 7$

2) $|2x - 5| < 3$

3) $|3x - 4| \leq 2$

4) $|3x + 2| \geq 1$

5) $|5 - x| > 7$

6) $|3 - x| < 5$

7) $|7 - 4x| \leq 9$

8) $|6 - 2x| \geq 7$

9) $|2x - 5| > 3$

10) $|x + 4| \leq |2x - 6|$

11) $|3x| > |6 - 3x|$

12) $|3 + 2x| < |4 - x|$

13) $|9 - 2x| \geq |4x|$

14) $|5 - 2x| \geq 7$

15) $\left|\dfrac{x+2}{2x-3}\right| < 4$

16) $\left|\dfrac{6-5x}{3+x}\right| \leq \dfrac{1}{2}$

17) $|x - 2| + |x - 4| \geq 6$

Capítulo 2

Funções

2.1 Sistema Cartesiano Ortogonal

Quaisquer dois números reais formam um par, e quando a ordem de aparecimento é importante, o par passa a ser chamado de ***par ordenado***. Se x for o primeiro número e y for o segundo, esse par ordenado será denotado por (x, y).

O conjunto de todos os pares ordenados de números reais, denotado por $\mathbb{R}^2$, é chamado de ***plano numérico*** e cada par ordenado (x, y) será um ***ponto*** no plano numérico. Da mesma maneira que podemos identificar o conjunto dos números reais com os pontos de uma reta, podemos identificar cada par ordenado (x, y) de números reais com os pontos de um plano geométrico.

O matemático francês René Descartes(1596-1650) estudou o uso de pares ordenados (x, y) na localização de pontos em mapas, usando a seguinte relação: $(x, y) =$ (latitude, longitude). Este foi o marco inicial que levou ao casamento da álgebra com a geometria, união hoje conhecida como geometria analítica. Escolhemos uma reta horizontal no plano geométrico, chamada de ***eixo x*** e uma reta vertical, chamada ***eixo y***. O ponto de interseção entre os eixos x e y é chamado de ***origem*** e é denotado por O (Figura 2.1).

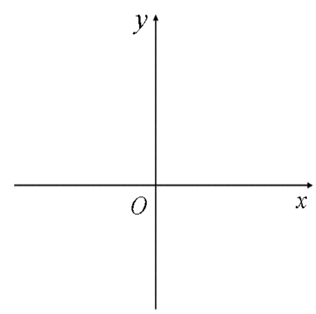


Figura 2.1:

Escolhemos uma escala numérica e estabelecemos a direita da origem como a parte positiva do eixo x e a esquerda da origem como a parte negativa do eixo x. Analogamente, estabelecemos acima da origem como a parte positiva do eixo y e abaixo da origem como a parte negativa do eixo y.

Associamos cada par de números reais (x, y) com um ponto no plano geométrico. Para representar geometricamante o par ordenado (x, y) marcamos no eixo x o ponto correspondente ao número x; marcamos no eixo y o ponto correspondente ao número y; traçamos uma reta s paralela ao eixo y passando por x; traçamos uma reta r paralela ao eixo x passando por y; destacamos o ponto P, de interseção das retas s e r (Figura 2.2), que será o ponto associado ao par ordenado (x, y).

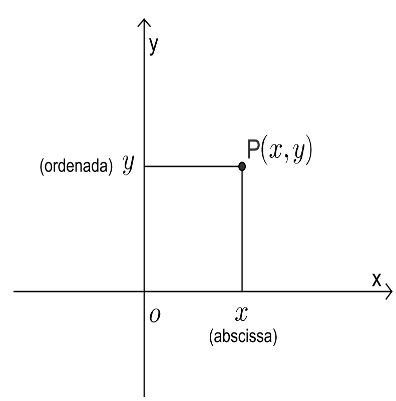


Figura 2.2:

O primeiro número do par é chamado ***abscissa*** do ponto P e o segundo número do par é chamado de ***ordenada*** do ponto P.

A abscissa e a ordenada de um ponto são denominadas ***coordenadas cartesianas retangulares*** do ponto. Existe uma correspondência biunívoca entre os pontos em um plano geométrico e o $\mathbb{R}^2$; isto é, a cada ponto corresponde um único par ordenado (x, y) e a cada par ordenado corresponde um único ponto. Essa correspondência é chamada de ***sistema de coordenadas cartesianas ortogonais ou plano cartesiano.***

Os eixos x e y são chamados de ***eixos coordenados.*** Esses eixos dividem o plano em quatro partes chamadas ***quadrantes,*** como mostra a Figura 2.3.

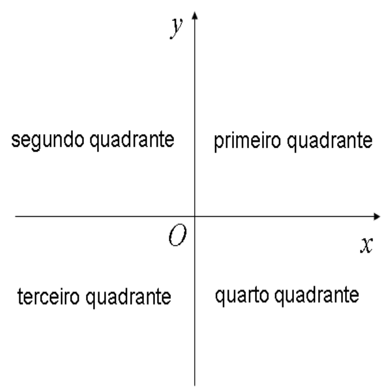


Figura 2.3:

Se o par ordenado de números reais (x, y) é igual ao par ordenado de números reais (z, w) então $x = z$ e $y = w$.

Exemplo 2.1 *Faça um sistema cartesiano ortogonal, e nele localize os pontos: A(3,0), B(0,-2), C(2,2), D(-2,-3), E(1,-4), F(-3,4).*

Exemplo 2.2 *Determine se as sentenças são verdadeiras (V) ou falsas (F):*

( ) (-5, 4) pertence ao terceiro quadrante;

( ) os pontos de abscissas negativas e ordenadas positivas pertencem ao primeiro quadrante;

( ) um ponto no quarto quadrante tem abscissa positiva e ordenada negativa.

Produto cartesiano

Dados dois conjuntos não-vazios A e B, o ***produto cartesiano*** de A por B, denotado por $A \times B$, é o conjunto de todos os pares ordenados (x, y), em que o primeiro elemento pertence à A e o segundo pertence à B. Isto é,

$$A \times B = \{(x, y)/x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Exemplo 2.3 *Dados os conjuntos* $A = \{1, 2, 3\}$ *e* $B = \{1, 4\}$*, determine o conjunto* $A \times B$ *e represente-o num plano cartesiano e por meio de um diagrama de Venn.*

2.2 Relações

Dados dois conjuntos não-vazios A e B. Uma ***relação*** R do conjunto A no conjunto B é qualquer subconjunto de $A \times B$.

Exemplo 2.4 *Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8\}$. O produto cartesiano de A por B é:*

$$A \times B = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (1, 8), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8),$$
$$(3, 2), (3, 4), (3, 6), (3, 8), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (4, 8)\}.$$

Consideremos, agora, alguns subconjuntos de $A \times B$:

$R_1 = \{(x, y) \in A \times B \ tal \ que \ \ y = 2x\} =$

$R_2 = \{(x, y) \in A \times B \ tal \ que \ \ y = x\} =$

$R_3 = \{(x, y) \in A \times B \ tal \ que \ \ y = 6\} =$

$R_4 = \{(x, y) \in A \times B \ tal \ que \ \ x = 2\} =$

Cada um desses conjuntos são relações entre os conjuntos A e B.

Se R é uma relação de A em B. O ***domínio de*** R, denotado por $D(R)$ é o conjunto de todos os primeiros elementos dos pares ordenados que pertencem à R. Isto é,

$$D(R) = \{x \in A \text{ tal que } \exists \, y \in B \text{ com } (x, y) \in R\}$$

A imagem de R, denotada por $Im(R)$ é o conjunto de todos os segundos elementos dos pares ordenados que pertencem à R. Isto é

$$Im(R) = \{y \in B \text{ tal que } \exists \, x \in A \text{ com } (x, y) \in R\}$$

Exemplo 2.5 *Determinar o domínio e a imagem das relações do exemplo 2.4.*

Dada uma relação R de A em B, o conjunto $R^{-1} = \{(y, x) \in B \times A : (x, y) \in A \times B)\}$ representa uma relação de B em A, que é denominada ***relação inversa*** de R.

Exemplo 2.6 *Dados os conjuntos* $A = \{0, 1, 2, 3\}$ *e* $B = \{1, 2, 3, 5, 6\}$, *determinar a relação inversa da relação* $R = \{(x, y) \in A \times B : y = x + 1\}$.

Dizemos que uma relação f de A em B é uma ***aplicação*** se:

i) $D(f) = A$

ii) Para todo $x \in A$, existe um único $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

Notações: Se $(x, y) \in f$, então escrevemos $y = f(x)$(lemos: f de x).

$$f : A \to B$$

$$x \mapsto y$$

2.3 Funções

Dada uma aplicação $f : A \to B$. Se B é um conjunto numérico, f é dita função de A em B. Quando, $A, B \subseteq \mathbb{R}$, f é dita ***função real de variável real*** ou simplesmente ***função.***

Considerando uma função f de A em B, o ***domínio*** da função f, denotado por $D(f)$, é o conjunto A. O número real y é o valor da função f no ponto x, escrevemos $y = f(x)$. Dizemos que y é a ***imagem*** de x pela função f.

O conjunto dos $y \in B$ para os quais existe um $x \in A$ tal que $y = f(x)$ é chamado de ***conjunto imagem de*** f, denotamos o conjunto imagem de f por $Im(f)$.

Os números x e y são ***variáveis,*** sendo x a ***variável independente*** e y a ***variável dependente***.

O ***gráfico*** de uma função f é o conjunto de todos os pares ordenados $(x, f(x))$ pertencentes à função f.

Observação 2.1 *Para determinar o valor da função f em um número a de seu domínio, basta calcular $f(a)$.*

Exemplo 2.7 *Se $f(x) = 3x^2 - x + 2$, encontre $f(2), f(-2), f(a), f(-a), f(a+1)$,*

$2f(a), f(2a), f(a^2), [f(a)]^2$ e $f(a+h)$.

Exemplo 2.8 *Determine o domínio das funções:*

a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^3 - 4x}$

b) $g(x) = \dfrac{\sqrt{4+x}}{1-x}$

c) $h(x) = (8x^3 + 4)^4$

Observação 2.2 *O domínio de uma função é o maior subconjunto dos números reais para o qual a função está definida.*

Diferenciação entre relação e função

Pela definição de relação e função fica evidente que: toda função é uma aplicação, logo é uma relação mas, nem toda relação é uma função. A característica principal que difere uma função de uma relação é: para cada x de $D(f)$, o par (x, y) é único!!! Portanto traçando uma reta vertical paralela ao eixo y, passando por x ela tocará o gráfico de f em um único ponto. Analisemos os casos a seguir:

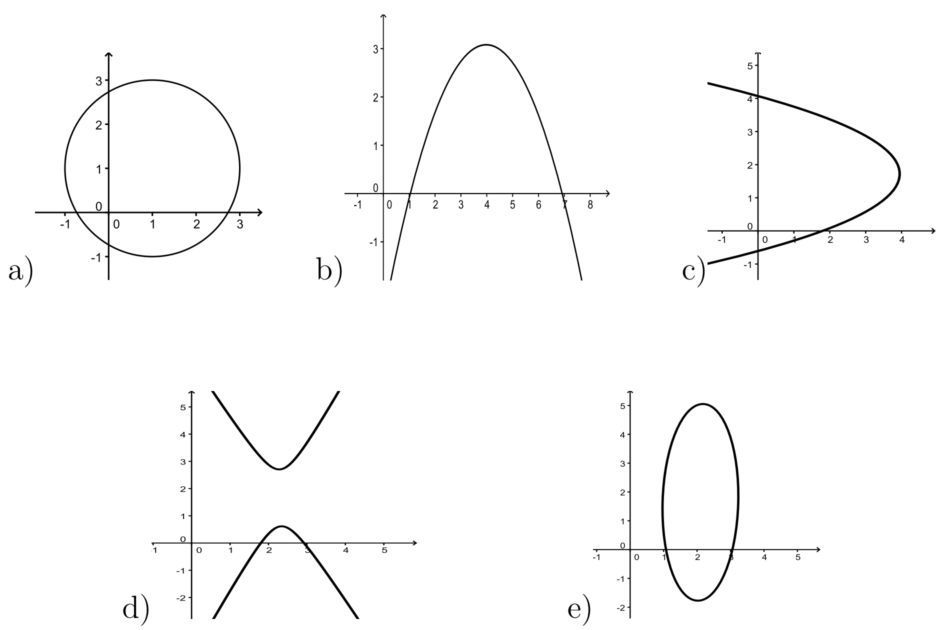


Figura 2.4:

Operações com funções

Dadas as funções f e g, a ***soma*** $f+g$, a ***diferença*** $f-g$, o ***produto*** $f \cdot g$ e o ***quociente*** $\dfrac{f}{g}$, são definidos por:

I) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

II) $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

III) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

IV) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

Em cada caso, o domínio da função resultante consiste naqueles valores de x comuns ao domínio de f e g, com exceção do caso IV), em que os valores de x para os quais $g(x) = 0$ devem ser excluídos.

Exemplo 2.9 *Dadas as funções f e g definidas por $f(x) = \sqrt{x+1}$ e $g(x) = \sqrt{x-4}$ determine $f+g, f-g, f.g, \dfrac{f}{g}$ e seus respectivos domínios.*

Outra operação com funções consiste em obter a **função composta** *de duas funções.*

Dadas as funções f e g, a ***função composta*** de f com g, denotada por $f \circ g$, é definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

O **domínio** de $f \circ g$ é o conjunto de todos os números x do domínio da g, tal que $g(x)$ esteja no domínio da f.

Exemplo 2.10 *Dadas as funções f e g definidas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$ determine $f \circ g$ e apresente seu domínio.*

Exemplo 2.11 *Dadas as funções f e g definidas por $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = 2x - 3$ determine $f \circ g, g \circ f, f \circ f$ e $g \circ g$ e seus respectivos domínios.*

Seja f uma função:

i) f é **par** se, e somente se, $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in D(f)$;

ii) f é **ímpar** se, e somente se, $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in D(f)$.

Exemplo 2.12 *Verifique se as funções abaixo são pares ou ímpares:*

1. $f(x) = x^2$

2. $g(x) = x^3$

3. $h(x) = \dfrac{x+1}{4}$

Dada uma função f definida num intervalo I, com $x_1, x_2 \in I$, temos :

i) f é **crescente** em I se, e somente se, $f(x_1) < f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$;

ii) f é **decrescente** em I se, e somente se, $f(x_1) > f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$.

Seja $f : A \to B$ uma função:

i) f é injetiva, se e somente se, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, com $x_1, x_2 \in A$;

ii) f é sobrejetiva, se e somente se, $Im(f) = B$;

iii) f é bijetiva, se e somente se, f for injetiva e sobrejetiva.

Dada uma função f, a ***função inversa*** de f, se existir, é a função, denotada por f^{-1}, tal que:

$$f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$$

Exemplo 2.13 *Dadas as funções f e g definidas por $f(x) = -2x+1$ e $g(x) = \frac{1}{2}(1-x)$, verifique que g é a função inversa de f.*

Exemplo 2.14 *Dadas as funções abaixo, determine suas inversas*

1. $w(x) = 6x$
2. $g(x) = -3x + 3$
3. $h(x) = -\dfrac{x+1}{4}$
4. $f(x) = \dfrac{2}{5}x - 2$

Tipos e gráficos de funções

Apresentaremos a seguir os tipos de funções que farão parte de nosso estudo.

- **Funções polinomiais:** são funções definidas por um polinômio .
- **Funções racionais:** são funções que podem ser escritas como a divisão entre duas funções polinomiais
- **Funções algébricas:** são funções que podem ser expressas em termos de somas, diferenças, produtos, quocientes ou raízes de funções polinomiais .
- **Funções transcendentes:** são as funções que não são algébricas como, por exemplo, as funções logarítmicas, as exponenciais e as trigonométricas.

2.4 Funções Polinomiais

Uma função f definida por

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0$$

emque os coeficientes $a_0, a_1, ..., a_n$ são números reais $(a_n \neq 0)$ e n um número inteiro não negativo, é chamada ***função polinomial*** de grau n.

Exemplo 2.15 *A função f definida por $f(x) = 3x^5 - x^2 + 7x - 1$ é uma função polinomial de grau 5.*

Observação 2.3 *Um número real x_0 é* **raiz** *de uma função polinomial f se, e somente se, $f(x_0) = 0$.*

Dependendo do seu grau, algumas funções polinomiais recebem nomes especiais.

Função constante: é toda função polinomial de grau zero. Isto é,

$$f(x) = c, \ c \neq 0$$

Observação 2.4 *Se todos os coeficientes $a_0, a_1, ..., a_n$ de um polinômio são iguais a zero, temos o polinômio nulo, que é desprovido de grau. Assim uma função f definida pelo polinômio nulo, isto é $f(x) = 0$, será chamada* ***função nula****.*

O gráfico de uma função constante é uma reta paralela ao eixo x, que intercepta o eixo y no ponto $(0, c)$.

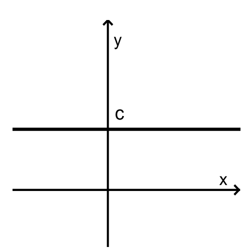


Figura 2.5:

Exemplo 2.16 *As funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por*

- $f(x) = 3$
- $f(x) = -1$
- $f(x) = \sqrt{5}$
- $f(x) = -\dfrac{3}{2}$

são funções constantes.

Função linear afim: também conhecida como função do 1^0 grau. É toda função polinomial de grau 1 (um). Isto é, uma função do tipo:

$$f(x) = ax + b, \quad a \neq 0.$$

O gráfico de uma função linear afim é uma reta que intercepta o eixo y no ponto $(0, b)$ (Figura 2.6) . O número a é chamado *coeficiente angular* da reta e representa a taxa de variação de $y = f(x)$ em relação a x e b é chamado *coeficiente linear* da reta. A raiz da função linear afim é o número $x = -\dfrac{b}{a}$.

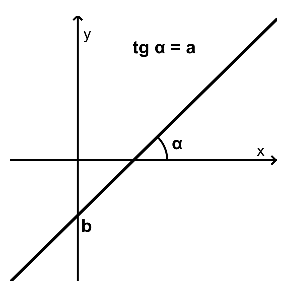


Figura 2.6:

Exemplo 2.17 *As funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por*

$\bullet f(x) = 3x - 2$ $\quad\bullet\; f(x) = -x + 4$ $\quad\bullet\; f(x) = x + \sqrt{3}$ $\quad\bullet\; f(x) = \dfrac{1}{2}x - 4$

são funções lineares afim.

Exemplo 2.18 *O salário fixo mensal de um segurança é de R$ 560,00. Para aumentar sua receita, ele faz plantões noturnos em um restaurante, onde recebe R$ 60,00 por noite de trabalho. Se em um mês ele fizer 3 plantões, que salário receberá? Qual é o salário final y, quando ele realiza x plantões?*

Função linear: são funções lineares afim com $b = 0$. Isto é, são funções do tipo:

$$f(x) = ax, \quad a \neq 0.$$

Seu gráfico é uma reta que passa pela origem (Figura 2.7) .

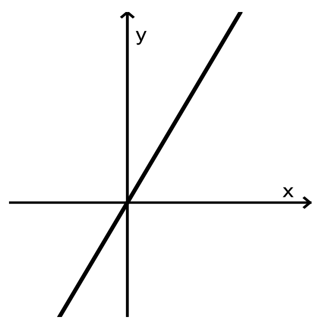


Figura 2.7:

Exemplo 2.19 *As funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por*

- $f(x) = 2x$
- $f(x) = -5x$
- $f(x) = -x$
- $f(x) = \dfrac{1}{3}x$

são funções lineares.

Função quadrática ou do 2^0 grau : é uma função polinomial de grau 2 (dois). Isto é, uma função do tipo:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0.$$

O gráfico de uma função do 2^0 grau é uma parábola com concavidade voltada par cima se $a > 0$, ou voltada para baixo se $a < 0$ (Figura 2.8) .

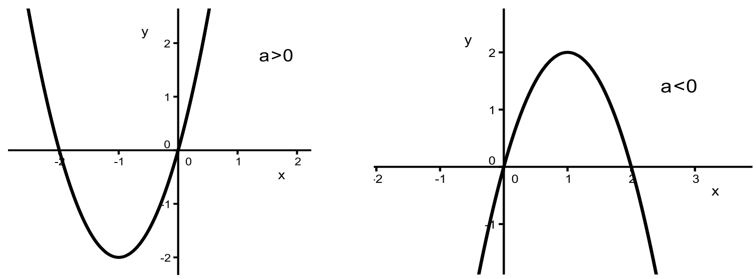


Figura 2.8:

Se a parábola tem concavidade para baixo, o vértice da parábola $V(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{\Delta}{4a})$ será o ponto onde a função assume seu valor máximo. E se parábola tem concavidade para cima, o vértice será o ponto onde a função assume seu valor mínimo.

Se $\mathbf{a} > \mathbf{0}$, temos

•$Im(f) = [y_v, \infty)$;

•f é crescente para $x > x_v$ e decrescente para $x < x_v$;

Se $\mathbf{a} < \mathbf{0}$, temos

•$Im(f) = (-\infty, y_v]$;

•f é crescente para $x < x_v$ e decrescente para $x > x_v$;

As **raízes** de um função quadrática são os valores de x onde $f(x) = 0$. Isto é,
$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, em que $\Delta = b^2 - 4ac$.

Se $\Delta > 0$, então $f(x)$ tem duas raízes reais distintas ($x_1 \neq x_2$).

Se $\Delta = 0$, então $f(x)$ tem duas raízes reais e iguais ($x_1 = x_2$).

Se $\Delta < 0$, então $f(x)$ não tem raízes reais.

Exemplo 2.20 *As funções* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definidas por*

a) $f(x) = x^2 - 3x + 1$ *b)* $f(x) = x^2 + x - 3$ *c)* $f(x) = -x^2 + 4x$

d) $f(x) = 3x^2 + 1$ *e)*$f(x) = -5x^2$

são funções quadráticas.

A construção da parábola:

Para construir a parábola procedemos do seguinte modo:

1. verifica-se se a concavidade é voltada para baixo ou para cima observando o sinal de a;
2. determina-se (se existir) os pontos (raízes) onde a parábola intercepta o eixo x ;
3. determina-se as coordenadas do vértice V;
4. traça-se a reta que passa por V e é paralela ao eixo y, que é o eixo de simetria da parábola;
5. determina-se o ponto $(0, c)$ que é o ponto onde a parábola intercepta o eixo y.

Exemplo 2.21 *Construir o gráfico das funções* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definidas por*

1. $f(x) = x^2 - 2x - 3$
2. $f(x) = -x^2 + 4x - 4$
3. $f(x) = x^2 + 2x + 2$

O estudo do sinal da função quadrática é útil para resolver inequações do 2^0 (segundo) grau.

Exemplo 2.22 *Determine e represente na reta numérica o conjunto-solução das seguintes inequações.*

a) $(x^2 - x - 6)(-x^2 + 2x - 1) < 0$

b) $(x - 1)(x^2 - 4) > 0$

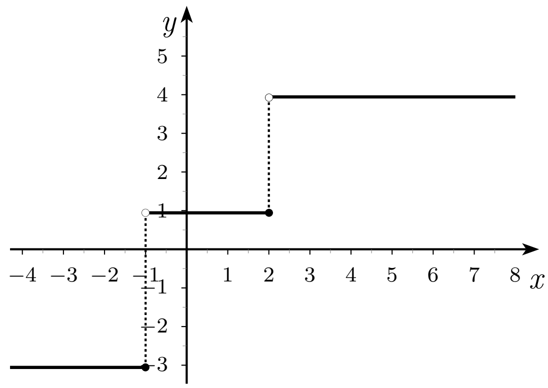
c) $x + 4 \leq -\dfrac{2}{x+1}$

2.5 Funções Definidas por Partes

São funções descritas por mais de uma expressão.

Exemplo 2.23 *A função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = \begin{cases} -3 \ \ se \ \ x \leq -1 \\ 1 \ \ se \ \ -1 < x \leq 2 \\ 4 \ \ se \ \ x > 2 \end{cases}$

Representação gráfica:



Exemplo 2.24 *A função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = \begin{cases} x+1 \ \ se \ \ x < 1 \\ 3x^2 - 2x \ \ se \ \ x = 1 \\ x^2 \ \ se \ \ x > 1 \end{cases}$

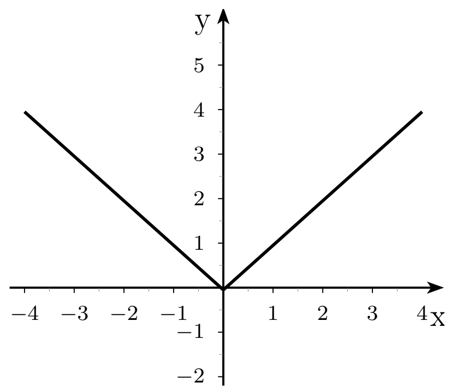
Representação gráfica:

2.6 Funções Modulares

A função modular, também conhecida como função valor absoluto, é dada por:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Representação gráfica:



Exemplo 2.25 *Esboce o gráfico das seguintes funções modulares:*

1. *A função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) =| x + 1 |$
2. *A função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) =| x - 1 |$
3. *A função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) =| x | +1$
4. *A função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) =| x | -1$
5. *A função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) =| 2x |$

2.7 Funções Exponenciais

A função definida por $f(x) = a^x$ com $a > 0$ e $a \neq 1$ é chamada ***função exponencial de base a e expoente x***.

Exemplo 2.26 *As funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por*

- $f(x) = 2^x$
- $f(x) = 3^x$
- $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.

são funções exponenciais.

A representação gráfica de uma função exponencial é uma curva que intercepta o eixo y no ponto $(0, 1)$. Veja Figura 2.9

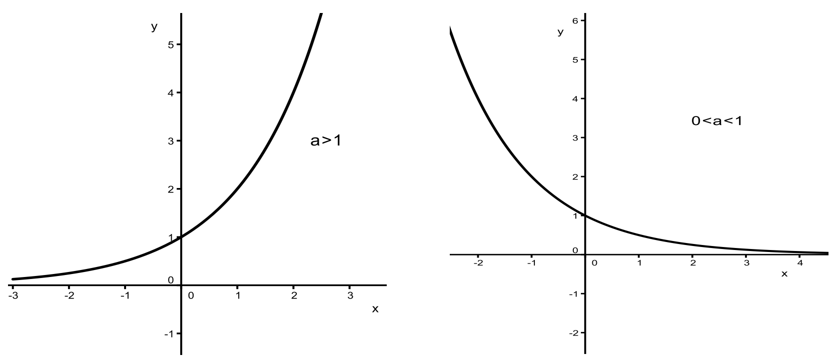


Figura 2.9:

Aplicações de funções exponenciais ocorrem frequentemente em modelos matemáticos da natureza e da sociedade, tais como crescimento populacional, decaimento radioativo, aplicações financeiras, dentre outras.

Dentre todas as bases possíveis para a função exponencial, há uma mais utilizada no cálculo, é a base $e \cong 2,7182818$.

Exemplo 2.27 *Curva de aprendizagem é um conceito criado por psicólogos que constataram a relação existente entre a eficiência de um indivíduo e a quantidade de treinamento ou experiência possuída por este indivíduo. Um exemplo de curva de aprendizagem é dado pela expressão:*

$$Q(x) = 700 - 400e^{-0,5x}$$

onde Q é quantidade de peças produzidas por um funcionário, x é o tempo de experiência e $e \cong 2,7183$.

Com base nessas informações responda:

a) Quantas peças um funcionário com 2 meses de experiência deverá produzir mensalmente?

b) E um funcionário sem experiência? Compare os cálculos, e verifique se há coerência.

2.8 Funções Logarítmicas

Seja $a \in \mathbb{R}$, tal que $a > 0$ e $a \neq 1$. Chamamos função logarítmica de base a a função f, tal que para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f(x) = log_a x$$

A função ***logarítmica*** é a função inversa da função exponencial, assim , se $f(x) = a^x$, então

$$f^{-1}(x) = log_a x$$

Observação 2.5

- $log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$
- $log_a a^x = x$
- $a^{log_a x} = x$

Exemplo 2.28 *As funções* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definidas por*

- $f(x) = log_5 x$

- $f(x) = log_{\frac{1}{2}} x$

são funções logarítmicas.

A representação gráfica de uma função logarítmica é uma curva que intercepta o eixo x no ponto $(1, 0)$ (Figura 2.10).

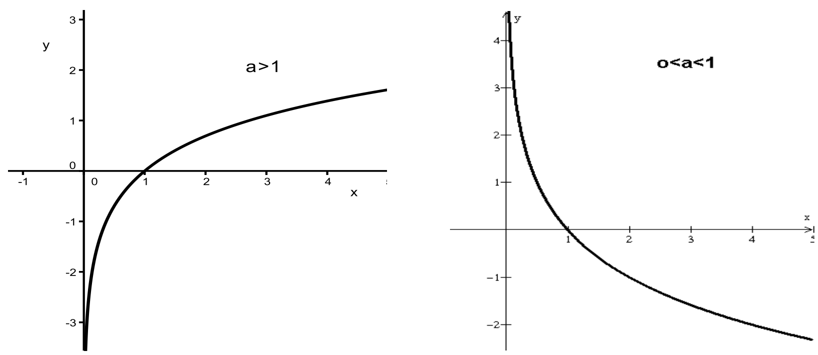


Figura 2.10:

.

Quando a base do logaritmo for o número natural e, o logaritmo é chamado de ***logaritmo natural***, e escrito como: $log_e x = lnx$

Exemplo 2.29 *Esboce o gráfico da função logarítmica dada por*

$$f(x) = log_2 x$$

Comparando as funções logarítmicas e exponenciais percebe-se que as curvas são simétricas em relação a reta $y = x$, fato este que ocorre entre funções inversas.

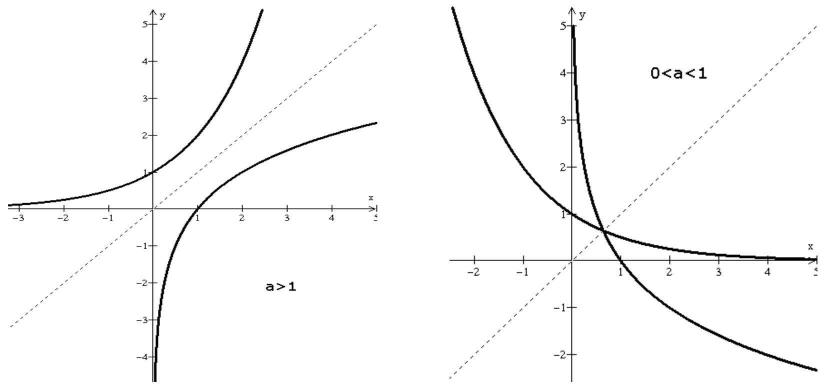


Figura 2.11:

.

Exemplo 2.30 *Numa determinada cidade, a população cresce à uma taxa de 3% ao ano, de modo que uma função que representa tal população em t anos é dada por*

$$P(t) = P_0(1,03)^t,$$

sendo P_0 a população inicial.

a) Em quantos anos a população desta cidade duplicará?

b) Se a população inicial é de 40000 habitantes, qual a população daqui 10 anos?

2.9 Funções Trigonométricas

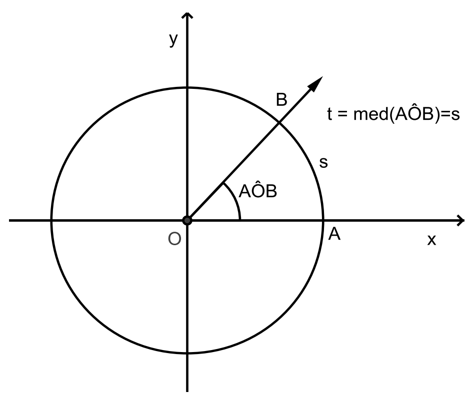
Você já deve ter feito algum estudo de trigonometria. Mas, dada a importância das funções trigonométricas em Cálculo, apresentamos aqui um breve resumo delas.

Em geometria, usamos muito a noção de ângulo e a medida deste é dada usualmente em graus. Mas, em Cálculo estamos interessados em funções trigonométricas de números reais e essas funções estão definidas em termos da medida de ***ângulos em radianos.***

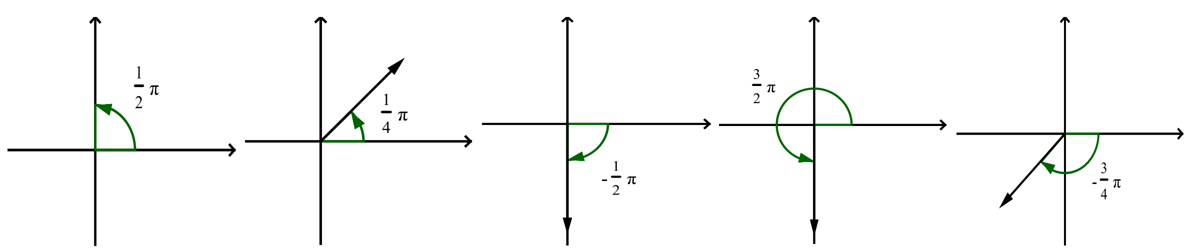
Definição 2.1 *Seja $A\hat{O}B$ um ângulo na posição padrão e $|\overrightarrow{OA}| = 1$. Se **s** unidades for o comprimento do arco de circunferência percorrido pelo ponto A quando o lado OA é girado até o lado OB, a **medida em radianos t**, do ângulo $A\hat{O}B$, será dada por*

$t = s$ se a rotação for no sentido anti-horário

$t = -s$ se a rotação for no sentido horário



Exemplo 2.31 *Usando que, a medida da circunferência é $C = 2\pi.r$ (r: medida do raio), para o círculo unitário temos: $C = 2\pi$ e as medidas em radianos dos ângulos abaixo determinados são, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{4}\pi$, $-\frac{1}{2}\pi$,$\frac{3}{2}\pi$, $-\frac{3}{4}\pi$, respectivamente.*



O Ciclo trigonométrico

Sobre a circunferência do círculo unitário podemos considerar os pontos $P(x, y)$ tais que o vetor $\overrightarrow{OP}$ determina a hipotenusa (unitária) de um triângulo retângulo, cujos catetos são as projeções do $\overrightarrow{OP}$ sobre o eixo x e sobre o eixo y.

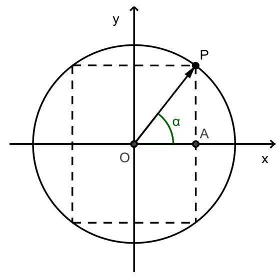


Figura 2.12:

.

Seja $\overrightarrow{OA}$ a projeção de $\overrightarrow{OP}$ sobre o eixo x e α o ângulo entre os vetores $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OA}$. Observe, que α varia de $0\ rad$ a $2\pi\ rad$, enquanto P percorre a circunferência.

Função seno e cosseno

Definição 2.2 *Seja t um número real. Coloque na posição padrão um ângulo com t rad de medida e seja P a intersecção do lado final do ângulo com o ciclo trigonométrico. Se P for o ponto (x, y), então a função **seno** e a função **cosseno** serão definidas por:*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto sent = y \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto cost = x \end{aligned}$$

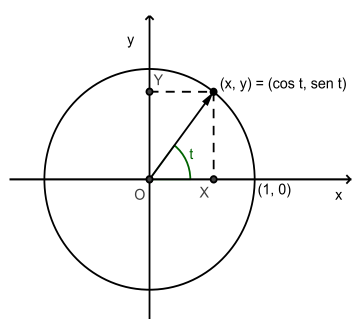


Figura 2.13:

.

Da definição acima, vemos que *sen* t e *cos* t estão definidas para todos os valores de t, no entanto por estarem definidas sobre o ciclo trigonométrico, suas imagens pertencem ao intervalo [-1, 1]. Resumindo,

$$D_{sen} = D_{cos} = \mathbb{R},$$

$$Im_{sen} = Im_{cos} = [-1, 1]$$

Ainda da definição segue que: $sen(t + 2\pi) = sen(t)$ e $cos(t + 2\pi) = cos(t)$. Esta propriedade é chamada de **periodicidade**.

Definição 2.3 *Uma função f é dita **periódica** se existir um número real $p \neq 0$ tal que quando x estiver no domínio de f, então $x + p$ estará também no domínio de f e $f(x + p) = f(x)$. O menor número real positivo p que satisfaz a definição acima é chamado de **período** de f.*

Assim, é fácil ver que as funções **seno** e **cosseno** são periódicas, com período $p = 2\pi$.

Exemplo 2.32 *Use a periodicidade das funções **seno** e **cosseno** para determinar o valor exato de:*

- $sen\left(\frac{17}{4}\pi\right)$

- $cos\left(\frac{7}{3}\pi\right)$

- $sen\left(\frac{15}{2}\pi\right)$

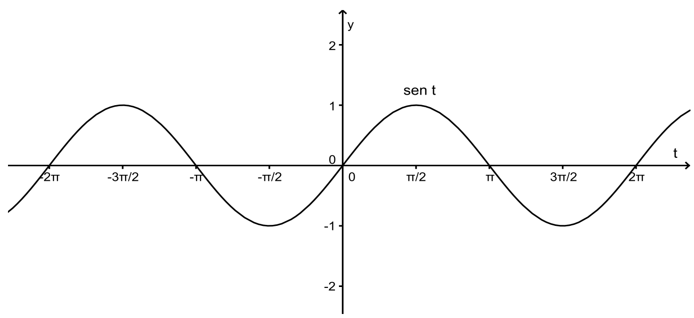
- $cos\left(-\frac{7}{6}\pi\right)$

O gráfico da função seno

Analisando a definição da função **seno** podemos notar que:

- $sen\ t = 0$ para $t = 0$
- $0 < sen\ t < 1, 0 < t < \dfrac{\pi}{2}$
- $sen\ t = 1$ para $t = \dfrac{\pi}{2}$
- $0 < sen\ t < 1, \dfrac{\pi}{2} < t < \pi$
- $sen\ t = 0$ para $t = \pi$
- $-1 < sen\ t < 0,\ \pi < t < \dfrac{3\pi}{2}$
- $sen\ t = -1$ para $t = \dfrac{3\pi}{2}$
- $-1 < sen\ t < 0, \dfrac{3\pi}{2} < t < 2\pi$

Desta análise, segue que o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = sen\ t$, é dado por:



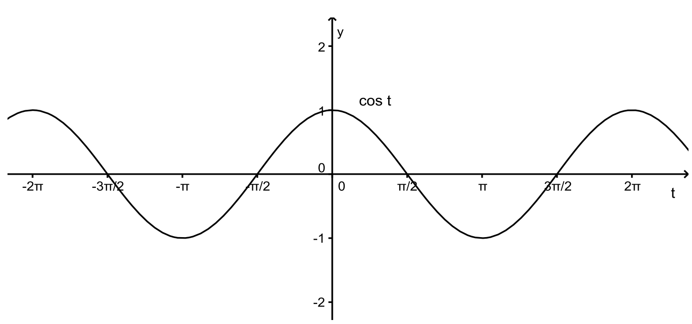
.

O gráfico da função cosseno

Analisando a definição da função **cosseno** podemos notar que:

- $cos\ t = 1$ para $t = 0$
- $0 < cos\ t < 1,\ \ 0 < t < \dfrac{\pi}{2}$
- $cos\ t = 0$ para $t = \dfrac{\pi}{2}$
- $-1 < cos\ t < 0,\ \ \dfrac{\pi}{2} < t < \pi$
- $cos\ t = -1$ para $t = \pi$
- $-1 < cos\ t < 0,\ \ \pi < t < \dfrac{3\pi}{2}$
- $cos\ t = 0$ para $t = \dfrac{3\pi}{2}$
- $0 < cos\ t < 1,\ \ \dfrac{3\pi}{2} < t < 2\pi$

Desta análise, segue que o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = cos\ t$, é dado por:

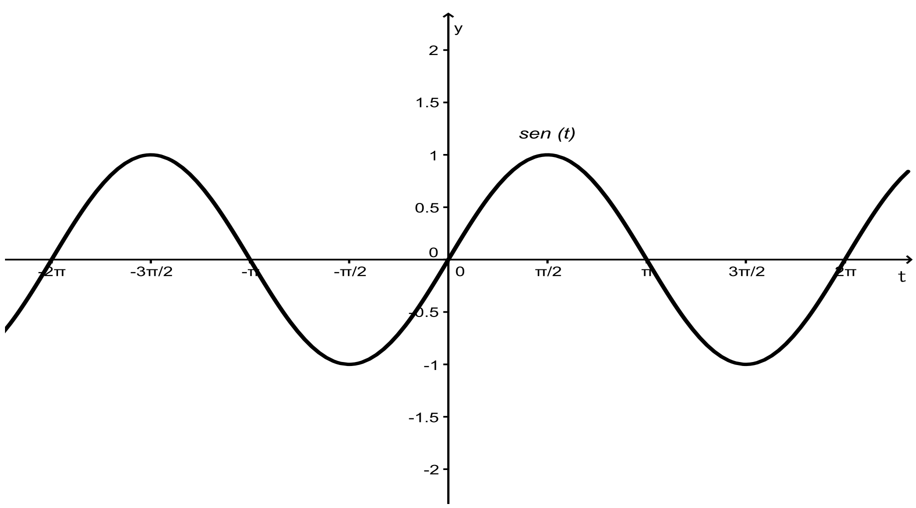


O gráfico da função $(sent) + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Usando os arcos principais e a definição da função $sen\,t$, complete as tabelas seguintes e esboce o gráfico das funções $(sent) + 1$ e $(sent) - 1$:

t	$sen\,t$	$(sen\,t) + 1$
0		
$\frac{\pi}{2}$		
π		
$\frac{3\pi}{2}$		
2π		

t	$sen\,t$	$(sen\,t) - 1$
0		
$\frac{\pi}{2}$		
π		
$\frac{3\pi}{2}$		
2π		

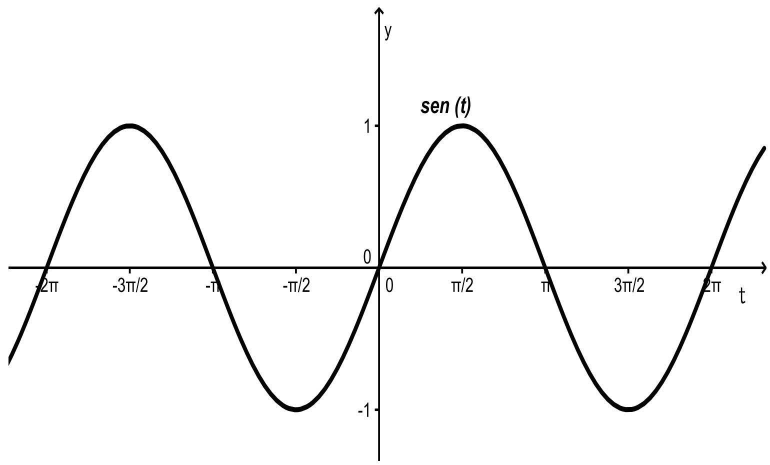


Assim, podemos ver que o gráfico da função $sen(t) + k$ é uma **translação vertical** do gráfico da função $sen\,t$, k unidades para cima ($k > 0$) ou para baixo ($k < 0$).

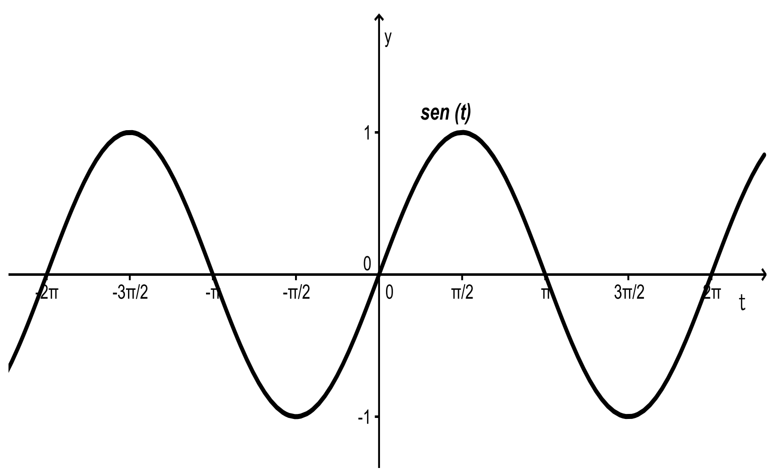
O gráfico da função $sen(t+k)$, $k \in \mathbb{R}$.

Usando os arcos principais e a definição da função $sen\,t$, complete as tabelas seguintes e esboce o gráfico das funções $sen(t-\frac{\pi}{2})$ e $sen(t+\pi)$:

t	$t-\frac{\pi}{2}$	$sen(t-\frac{\pi}{2})$
	0	
	$\frac{\pi}{2}$	
	π	
	$\frac{3\pi}{2}$	
	2π	



t	$t+\pi$	$sen(t+\pi)$
	0	
	$\frac{\pi}{2}$	
	π	
	$\frac{3\pi}{2}$	
	2π	

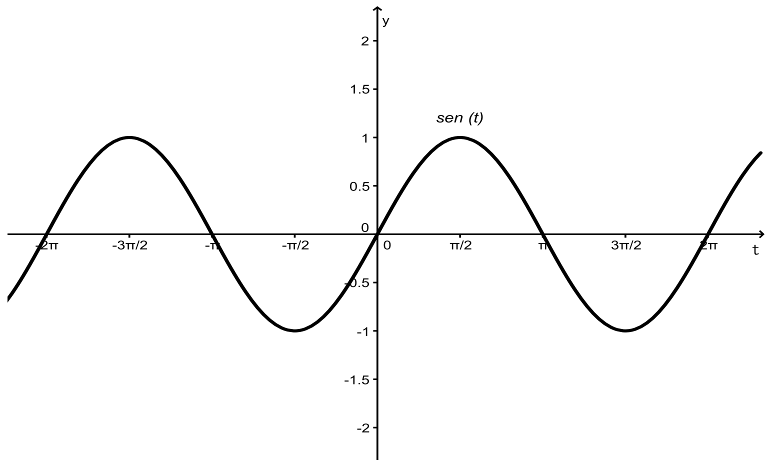


Assim, podemos notar que o gráfico da função $sen(t+k)$ é uma **translação horizontal** do gráfico da função $sen(t)$, k unidades para **esquerda** $(k>0)$ ou para **direita** $(k<0)$.

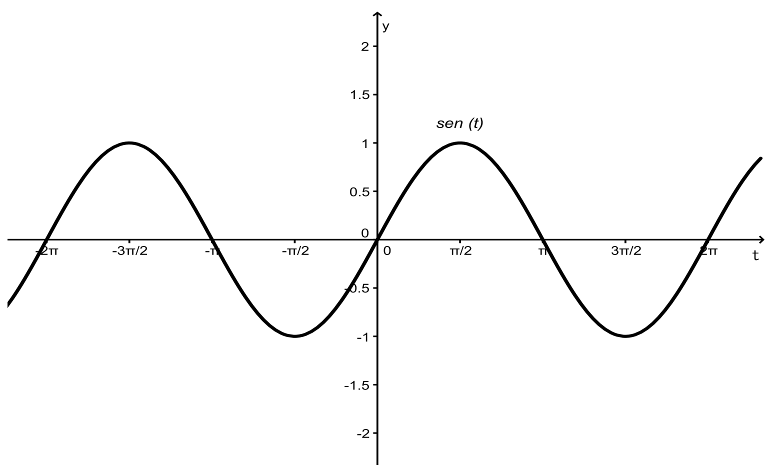
O gráfico da função $k.sen(t)$, $k \in \mathbb{R}$.

Usando os arcos principais e a definição da função $sen\,t$, complete as tabelas a seguir e esboce o gráfico das funções $2sen\,t$, $\frac{1}{2}sen\,t$, $-2sen\,t$ e $-\frac{1}{2}sen\,t$:

t	$sen\ t$	$2sen(t)$	$\frac{1}{2}sen(t)$
0			
$\frac{\pi}{2}$			
π			
$\frac{3\pi}{2}$			
2π			



t	$sen\ t$	$-2sen\ t$	$-\frac{1}{2}sen(t)$
0			
$\frac{\pi}{2}$			
π			
$\frac{3\pi}{2}$			
2π			

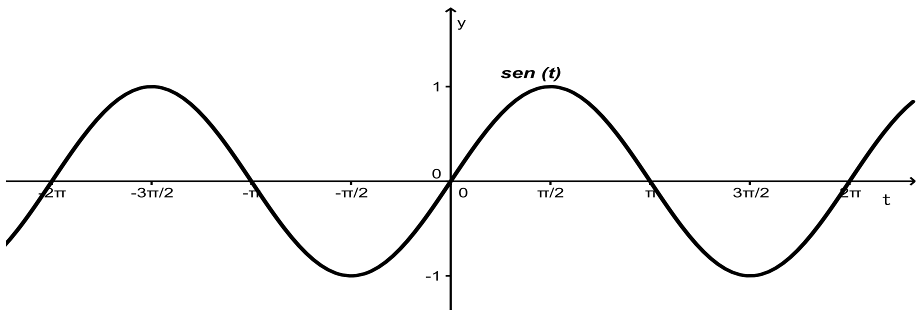


Assim, podemos ver que o gráfico da função $k.sen\,t$ é uma **dilatação/compressão vertical** do gráfico da função $sen\,t$, num fator k de **dilatação** ($\mathbf{k > 1}$) ou num fator k de **compressão** ($\mathbf{0 < k < 1}$). No caso $k < 0$, observamos que ocorrerá **dilatação**($\mathbf{k < -1}$) ou **compressão**($\mathbf{-1 < k < 0}$) do gráfico da função $-sen\,t$, que é um reflexo da função $sen\,t$ com relação ao eixo x.

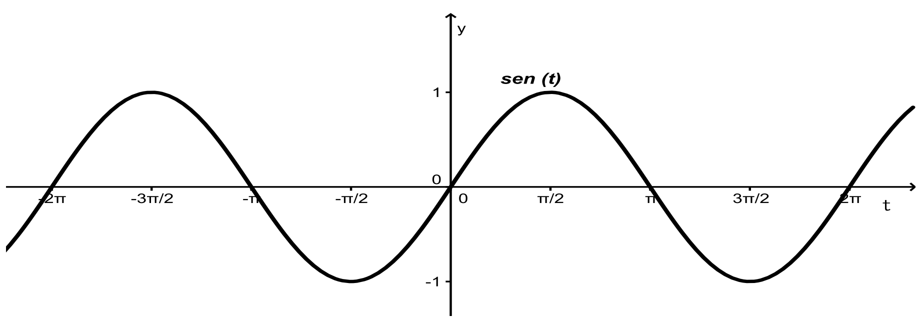
O gráfico da função $sen(k.t)$, $k \in \mathbb{R}$.

Usando os arcos principais e a definição da função $sen\, t$, complete as tabelas a seguir e esboce o gráfico das funções $sen(2t)$, $sen\left(\frac{1}{2}t\right)$:

t	$2t$	$sen(2t)$
	0	
	$\frac{\pi}{2}$	
	π	
	$\frac{3\pi}{2}$	
	2π	



t	$\frac{1}{2}t$	$sen\left(\frac{1}{2}t\right)$
	0	
	$\frac{\pi}{2}$	
	π	
	$\frac{3\pi}{2}$	
	2π	



No caso $k > 1$, observa-se que o gráfico de $sen(t)$ é comprimido horizontalmente, por um fator k. Assim, o período passa de $p = 2\pi$ para $p = \pi$. Já, no caso $0 < k < 1$, observa-se que o gráfico de $sen(t)$ é dilatado horizontalmente, por um fator k. Nesse caso, o período passa de $p = 2\pi$ para $p = 4\pi$.

No caso $k < 0$, há dilatação ou compressão horizontal da função $sen(-t) = -sen(t)$.

Exercício 1: Determine o domínio,a imagem, o período e o gráfico das seguintes funções trigonométricas:

- $cos(t) + 1$
- $cos(t) - 1$
- $cos(t - \pi)$
- $cos(t + \pi)$
- $2.cos(t)$
- $\dfrac{1}{2}cos(t)$
- $cos(\frac{1}{2}t)$
- $cos(2t)$

Exercício 2: Observando os resultados obtidos no exercício 2.1 registre, generalizando, suas conclusões sobre os gráficos das funções:

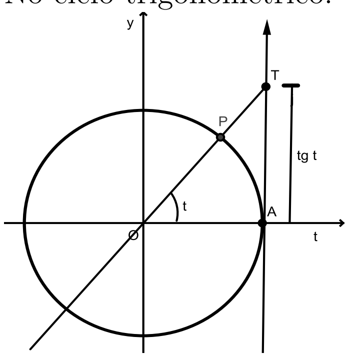
- $cos(t) + k$
- $cos(t + k)$
- $k.cos(t)$
- $cos(k.t)$

Função tangente

Considerando um arco AP, cuja medida é o número real t temos que a função tangente, denotada por tg, é dada por:

$$tg\,t = \frac{sen\,t}{cos\,t}, \text{ com } cos\,t \neq 0$$

No ciclo trigonométrico:

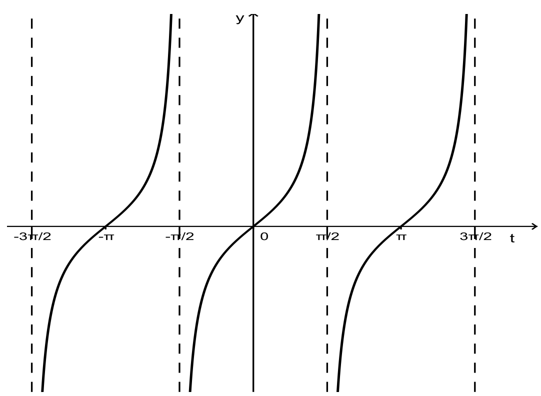


O eixo das tangentes é orientado no mesmo sentido do eixo das ordenadas Oy, tendo como origem o ponto A. A tangente de um arco AP é determinada pela reta auxiliar, que passa pelo centro O e pela extremidades do arco (ponto P), marcando o ponto T, no eixo das tangentes.

$$tg\,t = \overline{AT}$$

Gráfico da função tangente

Fazendo uso das funções seno e cosseno temos que o gráfico da função $f(t) = tg\ t$, é dado por:



Notemos que:

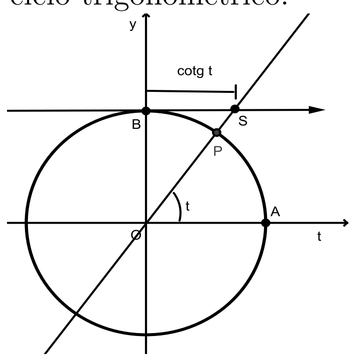
- o domínio da função tangente é o conjunto $D(tg) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$
- a imagem da função tangente é $Im(tg) = \mathbb{R}$.
- o período da função tangente é π.

Função cotangente

Considerando um arco AP, cuja medida é o número real t temos que a função cotangente, denotada por $cotg$, é dada por:

$$cotg\, t = \frac{cos\, t}{sen\, t}, \text{ com } sen\, t \neq 0$$

No ciclo trigonométrico:

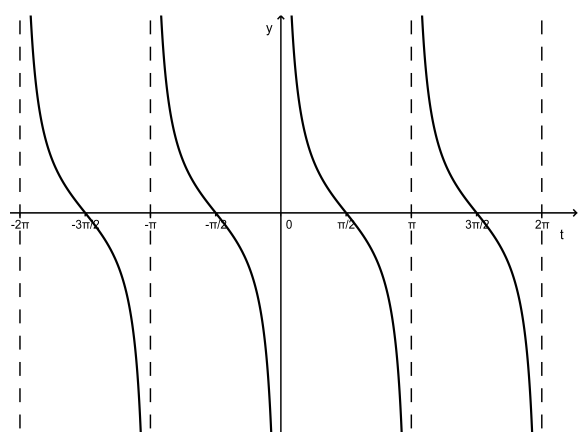


O eixo das cotangentes é orientado no mesmo sentido do eixo das abscissas Ox, tendo como origem o ponto B. A cotangente de um arco AP é determinada pela reta auxiliar, que passa pelo centro O e pela extremidades do arco (ponto P), marcando o ponto S, no eixo das cotangentes.

$$cotg\, t = \overline{BS}$$

Gráfico da função cotangente

Fazendo uso das funções seno e cosseno temos que o gráfico da função $f(t) = cotg\ t$, é dado por:



Notemos que:

- o domínio da função cotangente é o conjunto $D(cotg) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$
- a imagem da função cotangente é $Im(cotg) = \mathbb{R}$.
- o período da função cotangente é π.

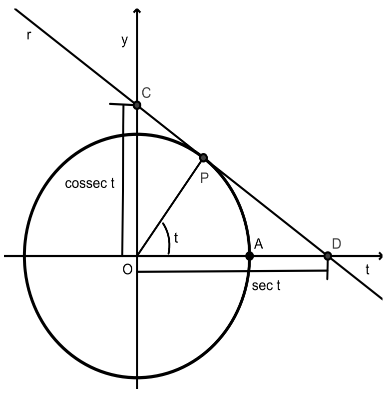
Função secante e cossecante

Seja AP um arco, cuja medida é o número real t.

A função **secante**, denotada por **sec** é dada por: $\sec t = \dfrac{1}{\cos t}$, com $\cos t \neq 0$

A função **cossecante**, denotada por **cossec**, é dada por: $\text{cossec}\, t = \dfrac{1}{\text{sen}\, t}$, com $\text{sen}\, t \neq 0$

No ciclo trigonométrico:

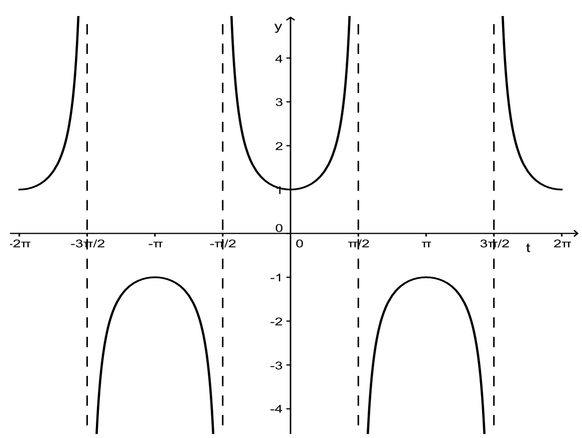


O **eixo das secantes** coincide com o eixo das abscissas e é orientado no mesmo sentido do eixo das abscissas Ox.
O **eixo das cossecantes** coincide com o eixo das ordenadas e é orientado no mesmo sentido do eixo das ordenadas Oy.
A **secante** e a **cossecante** de um arco AP são determinadas pela reta auxiliar r tangente à circunferência trigonométrica na extremidade do arco (ponto P), marcando o ponto D, no eixo das secantes e o ponto C, no eixo das cossecantes.

$$sec\, t = \overline{OD} \qquad cossec\, t = \overline{OC}$$

Gráfico da função secante

Fazendo uso da função cosseno temos que o gráfico da função $f(t) = sec\, t$, é dado por:

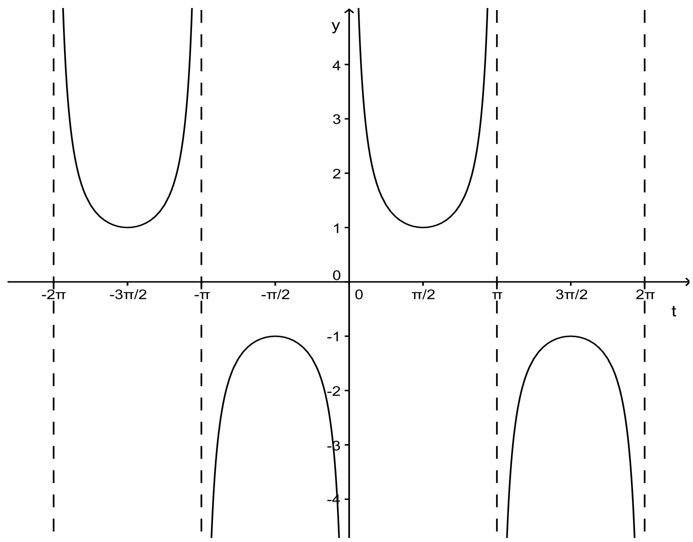


Notemos que:

- o domínio da função secante é o conjunto $D(sec) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$
- a imagem da função secante é $Im(sec) = \mathbb{R} -]-1, 1[$.
- o período da função secante é 2π.

Gráfico da função cossecante

Fazendo uso da funçao seno temos que o gráfico da função $f(t) = cossec\, t$, é dado por:



Notemos que:

• o domínio da função cossecante é o conjunto $D(cossec) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$

• a imagem da função cossecante é $Im(cossec) = \mathbb{R} -]-1, 1[$.

• o período da função cossecante é 2π.

Funções trigonométricas inversas

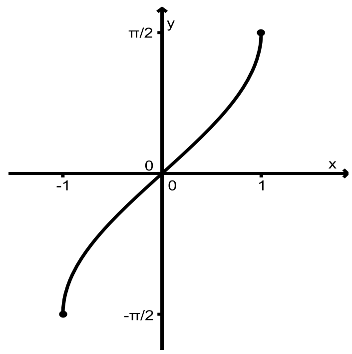
Lembremos que para uma função ter uma inversa é necessário que ela seja bijetiva. Portanto para definirmos as funções inversas das funções trigonométricas necessitamos restringir seus domínios.

Função arco seno

Definição 2.4 *A função inversa do seno, denotada por sen^{-1} é dada por :*

$$y = sen^{-1} x \text{ se e somente se } x = sen y \text{ e } -\frac{1}{2}\pi \leq y \leq \frac{1}{2}\pi$$

Gráfico da função arco seno



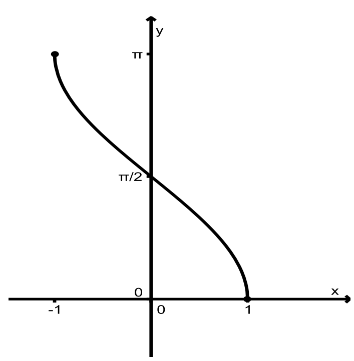
- o domínio da função arco seno é $D(sen^{-1}) = [-1, 1]$
- a imagem da função arco seno é $Im(sen^{-1}) = \left[-\dfrac{1}{2}\pi, \dfrac{1}{2}\pi\right]$.

Função arco cosseno

Definição 2.5 *A função inversa do cosseno, denotada por cos^{-1} é dada por :*

$$y = cos^{-1}\, x \text{ se e somente se } x = cos\, y \text{ e } 0 \leq y \leq \pi$$

Gráfico da função arco cosseno



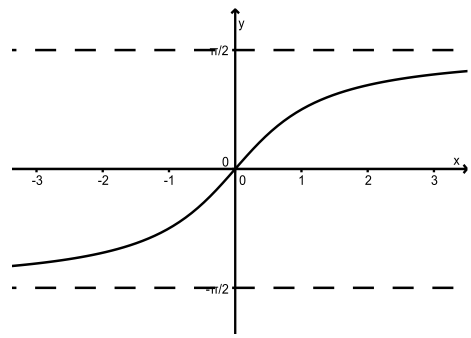
- o domínio da função arco cosseno é $D(cos^{-1}) = [-1, 1]$
- a imagem da função arco cosseno é $Im(cos^{-1}) = [0, \pi]$.

Função arco tangente

Definição 2.6 *A função inversa da tangente, denotada por* tg^{-1} *é dada por :*

$$y = tg^{-1}\,x \text{ se e somente se } x = tg\,y \text{ e } -\frac{1}{2}\pi < y < \frac{1}{2}\pi$$

Gráfico da função arco tangente



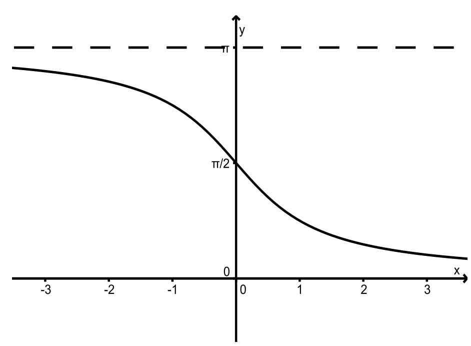
- o domínio da função arco tangente é $D(tg^{-1}) = \mathbb{R}$
- a imagem da função arco tangente é $Im(tg^{-1}) = \left]-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right[$

Função arco cotangente

Definição 2.7 *A função inversa da cotangente, denotada por* $cotg^{-1}$ *é dada por :*

$$y = cotg^{-1}\,x = \tfrac{1}{2}\pi - tg^{-1}\,x \text{ com } x \in \mathbb{R}$$

Gráfico da função arco cotangente



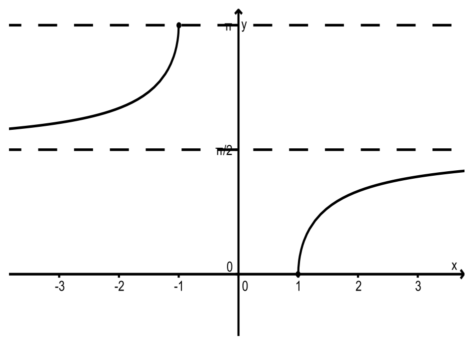
- o domínio da função arco cotangente é $D(cotg^{-1}) = \mathbb{R}$
- a imagem da função arco cotangente é $Im(cotg^{-1}) =]0, \pi[$.

Função arco secante

Definição 2.8 *A função inversa da secante, denotada por sec^{-1} é dada por :*

$$y = sec^{-1}\, x = cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Gráfico da função arco secante



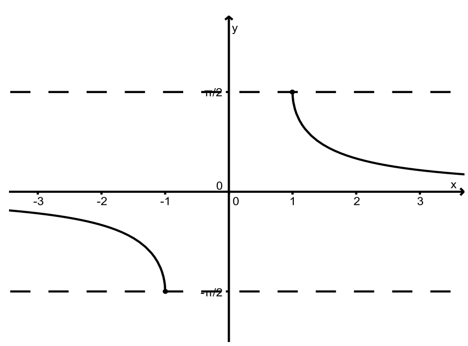
- o domínio da função arco secante é $D(sec^{-1}) =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.
- a imagem da função arco secante é $Im(sec^{-1}) = [0, \pi] - \{\frac{\pi}{2}\}$.

Função arco cossecante

Definição 2.9 *A função inversa da cossecante, denotada por $cossec^{-1}$ é dada por :*

$$y = cossec^{-1}\, x = sen^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Gráfico da função arco cossecante



- o domínio da função arco cossecante é $D(cossec^{-1}) = \mathbb{R} -]-1, 1[$
- a imagem da função arco cossecante é $Im(cossec^{-}1) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] - \{0\}$.

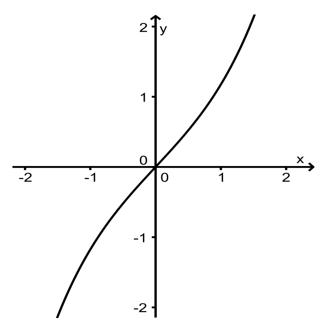
2.10 Funções Hiperbólicas

Função seno hiperbólico

Definição 2.10 *A função seno hiperbólico, denotada por senh é dada por :*

$$senh\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Gráfico da função seno hiperbólico



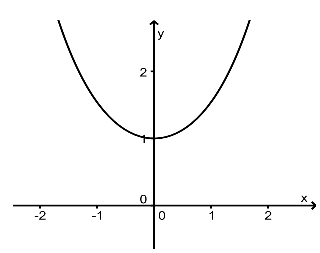
O domínio e a imagem da função seno hiperbólico é conjunto dos números reais.

Função cosseno hiperbólico

Definição 2.11 *A função cosseno hiperbólico, denotada por cosh é dada por :*

$$cosh\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Gráfico da função cosseno hiperbólico



O domínio da função cosseno hiperbólico é conjunto dos números e a imagem é o conjunto de todos os números reais no intervalo $[1, +\infty[$

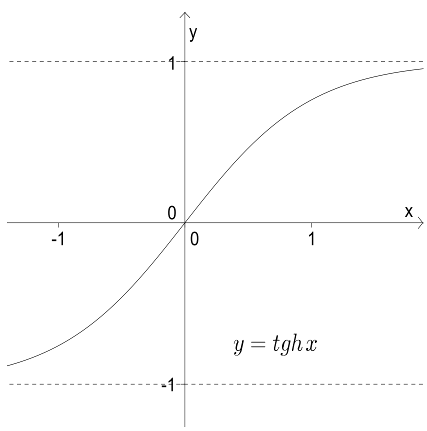
Outra funções hiperbólicas

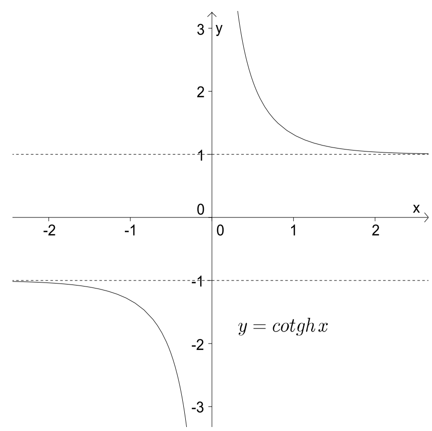
Definição 2.12 *As funções tangente, cotangente, secante e cossecante hiperbólicas são dadas da seguinte forma:*

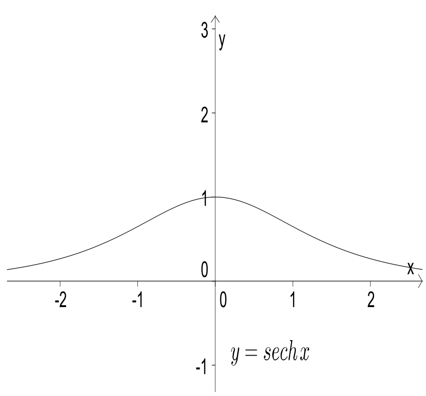
$$tgh\,x = \frac{senh\,x}{cosh\,x} \qquad cotgh\,x = \frac{cosh\,x}{senh\,x}$$

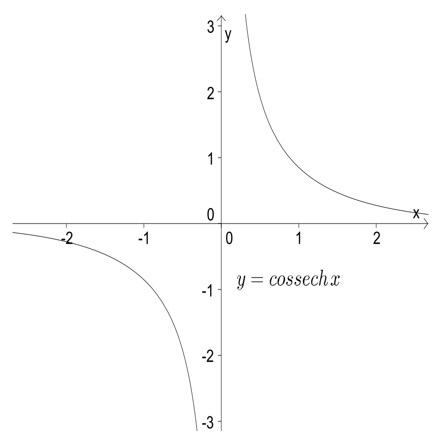
$$sech\,x = \frac{1}{cosh\,x} \qquad cossech\,x = \frac{1}{senh\,x}$$

Gráficos









Exercícios - Capítulo 2

Exercício 2.1 *Determine se o conjunto dado é uma função. Se for, qual o seu domínio?*

a) $\{(x,y)|y=\sqrt{x-4}\}$ *b)* $\{(x,y)|y=\sqrt{x^2-4}\}$ *c)* $\{(x,y)|y=\sqrt{4-x^2}\}$

d) $\{(x,y)|x^2+y^2=4\}$ *e)* $\{(x,y)|y=x^2\}$ *f)* $\{(x,y)|x=y^2\}$

g) $\{(x,y)|y=x^3\}$ *h)* $\{(x,y)|x=y^3\}$ *i)* $\{(x,y)|x^2+y^2=9\}$

Exercício 2.2 *Exprima como uma função de* x*:*

a) a área de um triângulo de base x *se sua altura é o dobro de sua base;*

b) o volume de uma esfera de raio x*;*

c) o volume de um cone circular reto de raio x *se sua altura é o triplo do raio da base;*

d) o volume e a área de um cilindro circular reto de raio x *sendo sua altura igual a* $\frac{10}{3}$ *do raio da base.*

Exercício 2.3 *Uma peça de carne foi colocada num freezer no instante* $t=0$*. Após* t *horas, sua temperatura, em graus centígrados, é dada por:* $T(t)=30-5t+\dfrac{4}{t+1}$.

a) Qual a temperatura da carne no instante em que foi colocada no freezer?

b) Depois de quanto tempo a temperatura da carne será de 16° centígrados?

c) Use o software GeoGebra para esboçar o gráfico de T, *estude seu comportamento e determine seu domínio e sua imagem.*

Exercício 2.4 *Dada a função* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *definida por* $f(x)=2x-1$, *determine, se existir:*

a) $f(3)$ *b)* $f(-2)$ *c)* $f(0)$ *d)* $f(a+1)$

e) $f(x+1)$ *f)* $f(2x)$ *g)* $2f(x)$ *h)* $f(x+h)$

i) $f(x)+f(h)$ *j)* $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}, h\neq 0$

Exercício 2.5 *Dada a função* $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$, *determine, se existir:*

a) $f(3)$ *b)* $f(-2)$ *c)* $f(0)$ *d)* $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ *e)* $f(1)$

Exercício 2.6 *Dada a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$ *determine, se existir:*

a) $f(-2)$ *b)* $f(-1)$ *c)* $f(0)$ *d)*$f(3)$

e) $f(h+1)$ *f)* $f(2x^2)$ *g)* $f(x^2 - 3)$ *h)*$f(x+h)$

Exercício 2.7 *Dada a função definida por* $g(x) = \sqrt{2x+3}$ *determine o domínio de* g *e encontre, se existir:* *a)* $g(-1)$ *b)* $g(4)$ *c)* $g(0)$ *d)* $g(-3)$ *d)* $g\left(-\dfrac{3}{2}\right)$

Exercício 2.8 *Dadas as funções* f *e* g *definidas abaixo, determine* $f+g, f-g, f.g, \dfrac{f}{g}$ *e seus respectivos domínios:*

a) $f(x) = x - 5;\ g(x) = x^2 - 1$ *b)* $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1};\ g(x) = \dfrac{1}{x}$ *c)* $f(x) = \sqrt{x};\ g(x) = x^2 - 1$

Exercício 2.9 *Dadas as funções* f *e* g *definidas abaixo, determine* $f \circ g, g \circ f, f \circ f, g \circ g$, *e seus respectivos domínios:*

a) $f(x) = x - 2;\ g(x) = x + 7$ *b)*$f(x) = x - 5;\ g(x) = x^2 - 1$

c) $f(x) = \sqrt{x-2};\ g(x) = x^2 - 2$ *d)*$f(x) = |x|;\ g(x) = |x+2|$

Exercício 2.10 *Dadas as funções* f *e* g *definidas abaixo, mostre que* f *e* g *são funções inversas.*

a) $f(x) = 2x - 3$ *e* $g(x) = \dfrac{x+3}{2}$ *b)*$f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ *e* $g(x) = \dfrac{1-x}{x}$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ *e* $g(x) = x^3$

Exercício 2.11 *Determine o domínio, a imagem e esboce o gráfico das seguintes funções:*

$a)\ f(x) = 3x - 1$

$b)\ f(x) = x^2 - 1$

$c)\ g(x) = \sqrt{x+1}$

$d)\ f(x) = \sqrt{4-2x}$

$e)\ h(x) = \sqrt{-x}$

$f)\ f(x) = |4 - x|$

$g)\ f(x) = 4 - |x|$

$h)\ g(x) = |x-2| + 4$

$i)\ f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}$

$j)\ g(x) = \begin{cases} -2 \ \ se \ \ x \leq 3 \\ 2 \ \ se \ \ x > 3 \end{cases}$

$k)\ g(x) = \begin{cases} 2x - 1 \ \ se \ \ x \neq 2 \\ 0 \ \ se \ \ x = 2 \end{cases}$

$l)\ h(x) = \begin{cases} x^2 - 4 \ \ se \ \ x < 3 \\ 2x - 1 \ \ se \ \ x \geq 3 \end{cases}$

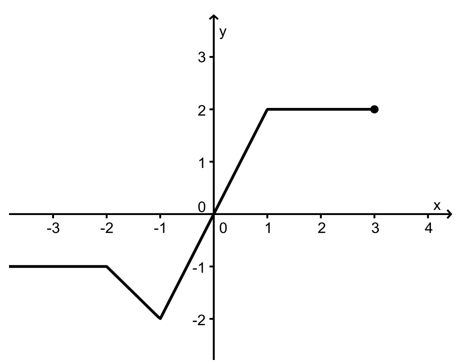
$m)\ g(x) = \begin{cases} 6x + 7 \ \ se \ \ x < -2 \\ 3 \ \ se \ \ x = -2 \\ 4 - x \ \ se \ \ x > -2 \end{cases}$

$n)\ h(x) = \begin{cases} x - 2 \ \ se \ \ x < 0 \\ 0 \ \ se \ \ x = 0 \\ x^2 + 1 \ \ se \ \ x > 0 \end{cases}$

$o)\ g(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$

$p)\ f(x) = 5 - x^2$

Exercício 2.12 *Considere o gráfico da função $y = f(x)$ abaixo e complete cada item:*



a) O domínio de f é: __________

b) A imagem de f é: __________

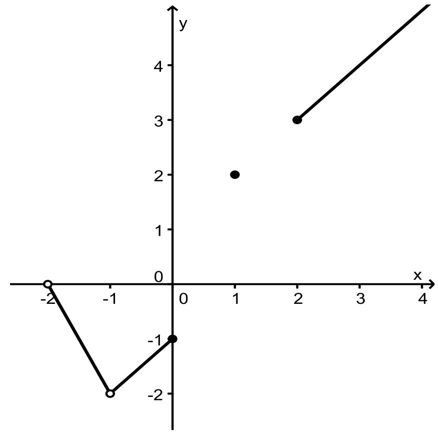
c) $f(-3)$: __________

d) $f(\frac{1}{2})$: __________

e) As soluções de $f(x) = -\frac{3}{2}$ *são* $x =$ _____ *e* $x =$ _____

Qual a expresssão que define a função f?

Exercício 2.13 *Repita o exercício 2.12 para a função g cujo gráfico é:*



Exercício 2.14 *É comum obervarmos em casas de xerox promoções do tipo: "Até 100 cópias: R\$0,10 por cópia. Acima de 100 cópias (de um mesmo original): R\$0,07 por cópia excedente."*

Determine:

a) o valor pago por 130 cópias de um mesmo original.

b) a lei que define a função preço p pago pela reprodução de x cópias de um mesmo original.

Exercício 2.15 *Um ônibus de 40 lugares foi fretado para uma excursão. A empresa exigiu de cada passageiro R\$ 20,00 mais R\$ 2,00 por lugar vago. Qual o número de passageiros para que a rentabilidade da empresa seja máxima?*

Exercício 2.16 *Esboce o gráfico das funções definidas por:*

a) $f(x) = e^x$ b) $g(x) = \ln x$ c) $h(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ d) $q(x) = log_{\frac{1}{3}} x$

Exercício 2.17 *Determine o domínio das seguintes funções:*

a) $f(x) = log_4(5 - 12x)$ b) $g(x) = log(8x + 3)$ c) $h(x) = log_4(x^2 + 3x + 5)$

d) $q(x) = log_2(x^2 + 10x)$ e) $m(x) = log_{x-2} 5$ f) $n(x) = log_{5-2x} 10$

g) $t(x) = log_{2x} x$ h) $s(x) = log_{x-1}(5x - 12)$ i) $r(x) = ln(x - 3)$

Exercício 2.18 *Resolva a desigualdade e represente a solução na reta real.*

a) $x^2 - 2x - 5 > 3$ *b)*$(-x^2 + x - 4)(x^2 - 9) < 0$ *c)* $\dfrac{x+1}{2x+3} > 2$

d) $(-x+3)(x^2+4x+4) \leq 0$ *e)* $\dfrac{1}{x-2} \geq \dfrac{3}{x+1}$ *f)*$\dfrac{2}{2x+3} \leq \dfrac{2}{x-5}$

Exercício 2.19 *A resistência elétrica R (em ohms) para um fio de metal puro está relacionada com sua temperatura T (em ^oC) pela fórmula $R = R_0(1 + aT)$, para constantes positivas a e R_0.*

a) *Para que temperatura se tem $R = R_0$?*

b) *Supondo que a resistência seja 0 (zero) se $T = -273^oC$ (zero absoluto), determine a.*

c) *Um fio de prata tem resistência de $1,27$ ohms a 0^oC. A que temperatura a resistência é igual a 2 ohms?*

Exercício 2.20 *Uma pessoa ingeriu $60mg$ de uma certa medicação. A bula do remédio informava que sua meia vida, (tempo necessário para que uma substância atinja metade do seu valor inicial) era de seis horas. Após doze horas da ingestão do remédio qual a quantidade do remédio ainda presente no organismo? E depois de t horas de sua ingestão?*

Exercício 2.21 *Cientistas utilizam a seguinte lei para determinar o instante da morte de vítimas de acidentes ou assassinatos. Se T denota a temperatura do corpo t horas após a morte, então*

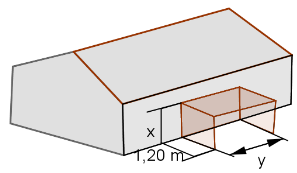
$$T = T_0 + (T_1 - T_0)(0,97)^t$$

onde T_0 é a temperatura do ar e T_1 é a temperatura do corpo no instante da morte. Se uma pessoa foi encontrada morta à meia-noite, em sua casa, quando a temperatura ambiente era de 70^0 F e a temperatura de seu corpo era de 80^0 F, quando a pessoa morreu? Assuma que a temperatura normal do corpo é de $98,6^0$ F.

Exercício 2.22 *Deve-se construir um abrigo retangular aberto consistindo em 2 lados verticais de $1,20m$ de largura e um teto plano, anexo a um armazém já existente. O teto plano deve ser* *de lata que custa $R\$\ 5,00$ o metro quadrado, e os dois lados devem ser de compensado, que custa $R\$\ 2,00$ por metro quadrado.*

a) *Se dispomos de $R\$\ 400,00$ para construção, expresse o comprimento y em função da altura x.*

b) *Expresse o volume V em função de x.*



Exercício 2.23 *Em química, define-se o pH de uma solução como logarítmo decimal do inverso da respectiva concentração de H_3O^+. O cérebro humano contém um fluido cuja concentração de H_3O^+ é $4,8 \times 10^{-8}$ (em média). Então, qual é o pH desse fluido?*

Exercício 2.24 *Durante um determinado ano, uma empresa teve um lucro diário L dado pela função*

$$L(x) = 50(|x-100| + |x-200|),$$

em que $x = 1, 2, \ldots, 365$, corresponde a cada dia do ano e L é dado em reais. Determine em que dia (x) do ano o lucro foi de $R\$10.000,00$.

Exercício 2.25 *Deve-se construir uma caixa aberta com um pedaço retangular de cartolina de 50×76 cm, cortando-se um quadrado de lado x em cada canto e dobrando-se os lados. Expresse o volume V da caixa como uma função de x.*

Exercício 2.26 *Uma maionese mal conservada causou mal-estar nos frequentadores de um restaurante. Uma investigação revelou a presença da bactéria salmonela, que se multiplica segundo a lei: $n(t) = 200.2^{at}$, em que $n(t)$ é o número de bactérias encontradas na amostra de maionese t horas após o início do almoço e a é uma constante real. a) Determine o número inicial de bactérias. b) Sabendo que após 3 horas do início do almoço o número de bactérias era* *de 800, determine o valor da constante a. c) Determine o número de bactérias após 1 dia da realização do almoço.*

Exercício 2.27 *Uma fábrica de determinado componente eletrônico tem a receita financeira dada pela função* $R(x) = 2x^2 + 20x - 30$ *e o custo de produção dada pela função* $C(x) = 3x^2 - 12x + 30$*, em que a variável* x *representa o número de componentes fabricados e vendidos. Se o lucro é dado pela receita financeira menos o custo de produção, o número de componentes que deve ser fabricado e vendido para que o lucro seja máximo é:*

Exercício 2.28 *A acidez de uma substância é medida pelo seu valor do pH, o qual é definido pela fórmula*

$$pH = - \log[H^*]$$

onde o símbolo $[H^*]$ *denota a concentração de íons de hidrogênio, medido em moles por litro. A água destilada tem um pH igual a 7; uma substância é chamada de ácida se tiver* $pH < 7$ *e básica se tiver* $pH > 7$*. Ache o pH de cada uma das substâncias seguintes e estabeleça se é ácida ou básica.*

Substância	$[H^*]$
sangue arterial	$3{,}9\times10^{-8}$ mol/L
tomates	$6{,}3\times10^{-5}$ mol/L
leite	$4{,}0\times10^{-7}$ mol/L
café	$1{,}2\times10^{-6}$ mol/L

Capítulo 3

Limites e Continuidade de Funções de Variáveis Reais

Neste capítulo apresentaremos a noção intuitiva de limite de uma função, assim como procedimentos para o cálculo de limites, apresentaremos também a definição de funções contínuas e o cálculo de limites de funções compostas.

3.1 Limites - Noção Intuitiva e Propriedades

Limites Finitos

Estudaremos o comportamento de uma função f nas proximidades de um ponto. Para fixar idéias, consideremos os seguintes exemplos:

Exemplo 3.1 *Consideremos a função* $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$ *definida por:*

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Notemos que $f(x)$ *está definida para todo* $x \in \mathbb{R}$, *exceto em* $x = 1$. *Queremos investigar o comportamento da função quando* x *está próximo de 1. Do ponto de vista numérico, as tabelas abaixo mostram o comportamento da função* f, *para valores de* x *à esquerda e à direita de* $x = 1$.

Tabela I

$x < 1$	$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$
0	
$0,5$	
$0,8$	
$0,9$	
$0,99$	
$0,999$	

Tabela II

$x > 1$	$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$
2	
$1,5$	
$1,2$	
$1,1$	
$1,01$	
$1,001$	

Observando as tabelas constatamos que à medida que x fica cada vez mais próximo de 1, tanto por valores de $x < 1$ (à esquerda de 1) como por valores de $x > 1$ (à direita de 1), $f(x)$ torna-se cada vez mais próximo de 2 e quanto mais próximo x estiver de 1, mais próximo de 2 estará $f(x)$.

Neste caso, dizemos que 2 é o ***limite*** da função f quando x se aproxima de 1, o que denotaremos por:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

Dizemos também que quando "x tende a 1, $f(x)$ tende a 2". Ou ainda **"o limite de $\mathbf{f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}}$, quando x tende a 1 é 2".**

Este resultado pode ser visto através da análise gráfica de f, cujo esboço vemos na figura **3.1**:

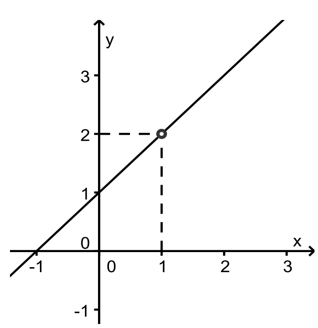


Figura 3.1:

.

Exemplo 3.2 *Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - x + 2$, e analisemos seu comportamento nas proximidades de $x = 2$.*

Observemos as tabelas III e IV a seguir:

Tabala III

$x < 2$	$f(x) = x^2 - x + 2$
1	
$1,5$	
$1,8$	
$1,9$	
$1,99$	
$1,999$	

Tabela IV

$x > 2$	$f(x) = x^2 - x + 2$
3	
$2,2$	
$2,1$	
$2,05$	
$2,01$	
$2,001$	

Observemos graficamente na figura **3.2**

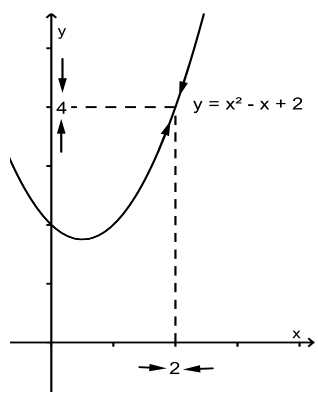


Figura 3.2:

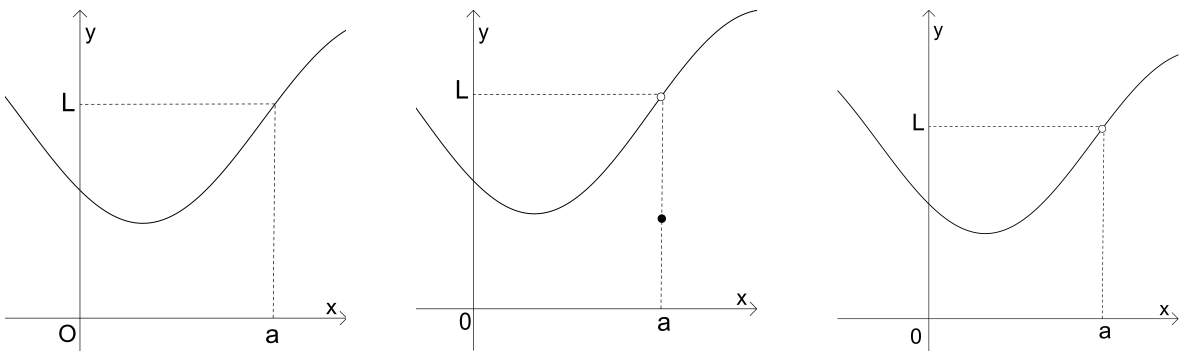
.

Das tabelas III e IV e do gráfico temos que à medida que x fica cada vez mais próximo de 2, $f(x)$ torna-se cada vez mais próximo de 4 e quanto mais próximo x estiver de 2, mais próximo de 4 estará $f(x)$. Isto é, "**o limite de $\mathbf{f(x) = x^2 - x + 2}$ quando x tende a 2 é 4**"

Notação: $\lim\limits_{\mathbf{x \to 2}} (\mathbf{x^2 - x + 2}) = \mathbf{4}$

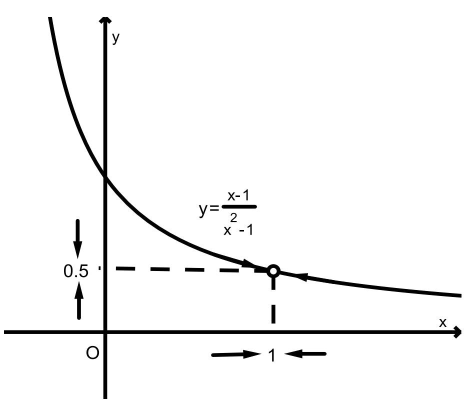
Definição 3.1 *Se f é uma função definida para todo número real em algum intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente no próprio a, então o limite de $f(x)$, quando x tende a a, é igual a L se pudermos aproximar $f(x)$ do valor L tanto quanto quizermos tomando x suficientemente próximo de a. Isto é,*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{L} \Leftrightarrow f(x) \to L \text{ quando } x \to a$$



Dizer que $\lim_{x\to a} f(x) = L$, significa que o ponto $(x, f(x))$ do gráfico da função se aproxima do ponto (a, L) quando x se aproxima de a.

Exemplo 3.3 *Encontre o valor de $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1}$, usando tabelas com valores maiores e menores do que 1 e analisando o gráfico.*

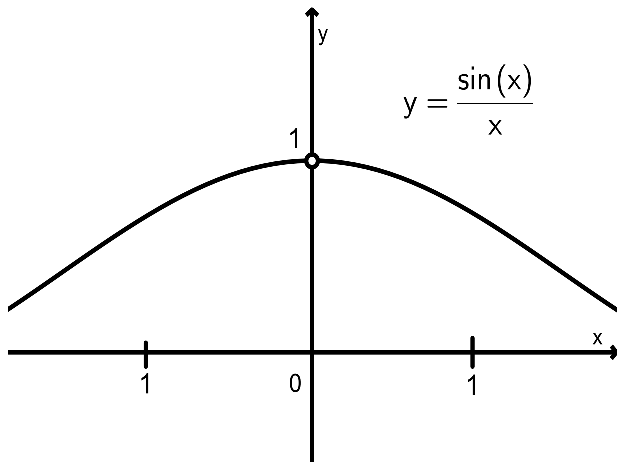


$x < 1$	$f(x)$
$0,5$	
$0,9$	
$0,99$	
$0,999$	
$0,9999$	

$x > 1$	$f(x)$
$1,5$	
$1,1$	
$1,01$	
$1,001$	
$1,0001$	

Exemplo 3.4 *Encontre* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{senx}{x}$, x *: (radianos) usando a tabela abaixo e analisando o gráfico da figura .*

x	$f(x)$
$\pm 1,0$	
$\pm 0,5$	
$\pm 0,4$	
$\pm 0,3$	
$\pm 0,2$	
$\pm 0,1$	
$\pm 0,05$	
$\pm 0,01$	
$\pm 0,005$	
$\pm 0,001$	



Exemplo 3.5 *Calcular* $\lim\limits_{x\to 2} 3x$

À medida que x *se aproxima de* 2, *o valor* $3x$ *se aproxima de 6. Portanto* $\lim\limits_{x\to 2} 3x = 6$

Exemplo 3.6 *Calcular* $\lim\limits_{x\to 0}(3x+7)$

À medida que x *se aproxima de 0, o valor* $3x+7$ *se aproxima de 7. Portanto*

$$\lim_{x\to 0}(3x+7) = 7$$

3.2 Limites laterais

Consideremos agora a função **f** cuja representação gráfica é:

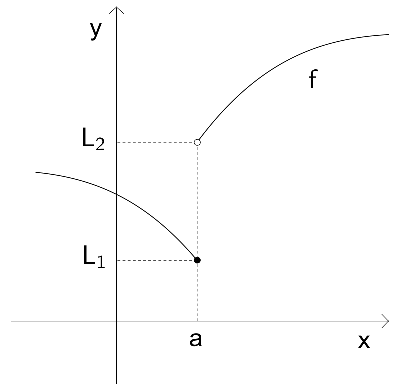


Figura 3.3:

.

Observemos que quando **x** assume valores que se aproximam do ponto **a** pela esquerda, isto é, por valores menores que **a**, os correspondentes valores de $f(x)$ se aproximam do número L_1. Para descrever este comportamento, dizemos que $f(x)$ tende a L_1 quando x tende a a pela esquerda, e escrevemos:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1$$

Por outro lado, quando x assume valores que se aproximam do ponto a pela direita, isto é, por valores maiores que a, os correspondentes valores de $f(x)$ se aproximam do número L_2. Para descrever este comportamento, dizemos que $f(x)$ tende a L_2 quando x tende a a pela direita, e escrevemos:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_2$$

Notemos que os limites laterais existem e são diferentes.

Consideremos agora a função **g** cuja representação gráfica é:

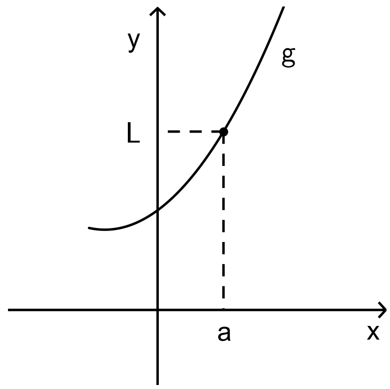


Figura 3.4:

Isto é, os limites laterais existem e são iguais.

Teorema 3.1 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ *se, e somente se existirem os limites laterais* $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ *e* $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ *e ambos forem iguais a* L.

Exemplo 3.7 *Seja* $f(x) = \begin{cases} x^2, & se \;\; x < 0 \\ x, & se \;\; x > 0, \end{cases}$ *vamos determinar* $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

Exemplo 3.8 *O gráfico de uma função g está dado na figura abaixo. Use-o para estabelecer (caso existam) os seguintes limites:*

a) $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)$ *b)* $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$ *c)* $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$

d) $\lim\limits_{x\to 5^-} g(x)$ *e)* $\lim\limits_{x\to 5^+} g(x)$ *f)* $\lim\limits_{x\to 5} g(x)$

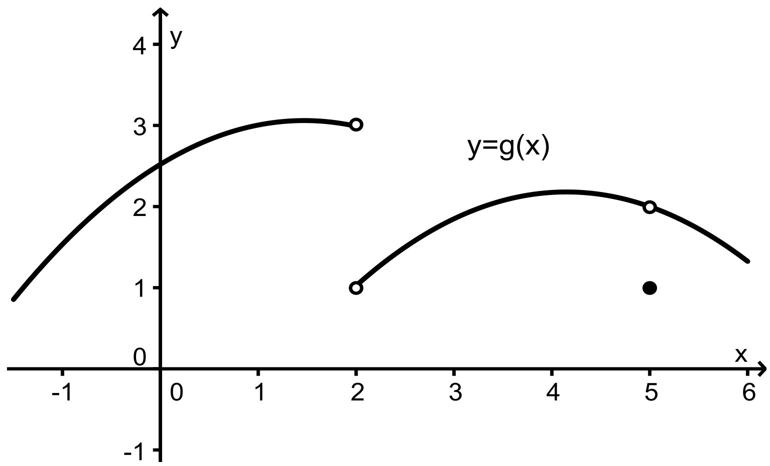


Figura 3.5:

3.3 Propriedades dos Limites

1. Se k é uma constante real então $\lim\limits_{x\to a} k = k$

   Exemplo 3.9 $\lim\limits_{x\to 5} 7 = 7$

2. Se m e b forem constantes quaisquer, $\lim\limits_{x\to a}(mx+b) = ma+b$

   Exemplo 3.10 $\lim\limits_{x\to 2}(3x+5) = 3.2+5 = 11$

3. $\lim\limits_{x\to a} x = a$

   Exemplo 3.11 $\lim\limits_{x\to 5} x = 5$

4. Limite da Soma, da Diferença, do Produto e do Quociente

   Se $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existem, então:

   i) $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$

   ii) $\lim\limits_{x\to a}[f(x).g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x). \lim\limits_{x\to a} g(x)$

   iii) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, desde que $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$

   Exemplo 3.12

   a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x+2}{4x-3} =$

   b) $\lim\limits_{x\to 1}(5x-4)(2x-1) =$

5. Se $\lim\limits_{x\to a} x$ existe, então $\lim\limits_{x\to a} x^n = \left[\lim\limits_{x\to a} x\right]^n$ para qualquer n inteiro positivo.

   Exemplo 3.13

   a) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+x+4) =$

   b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3-1}{4x+2} =$

6. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe, então $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^n$ para qualquer n inteiro positivo.

   Exemplo 3.14 $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+1)^7 =$

7. Seja k uma constante qualquer. Então, $\lim\limits_{x\to a} kf(x) = k\lim\limits_{x\to a} f(x)$

   Exemplo 3.15 $\lim\limits_{x\to 2} 10(x^2+1) =$

8. Se f é uma função polinomial, então $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ para todo número real a.

Exemplo 3.16 $\lim_{x \to 1} (x^3 + x^2 + x + 2) =$

9. Se q é uma função racional e a pertence ao domínio de q, então $\lim_{x \to a} q(x) = q(a)$.

Exemplo 3.17 $\lim_{x \to 1} \dfrac{x+1}{2x} =$

10. Se uma função f tem limite quando x tende a, então $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$, para n inteiro positivo, com a restrição de que se n for par $\lim_{x \to a} f(x) > 0$.

Exemplo 3.18 $\lim_{x \to 4} \sqrt[3]{\dfrac{x}{-7x+1}} =$

Outros exemplos:

Exemplo 3.19 $\lim_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5} =$

Exemplo 3.20 $\lim_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} =$

Exemplo 3.21 $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} =$

3.4 Limites Infinitos

Consideremos agora a função $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$, cuja representação gráfica é:

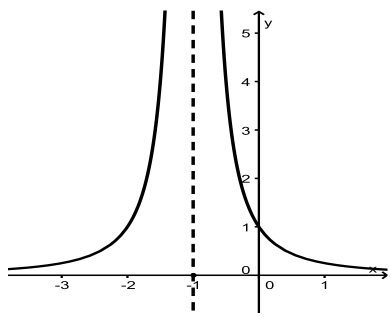


Figura 3.6:

x	-3	-2	$-1,5$	$-1,25$	$-1,1$	$-1,01$	$-1,001$ ...
$f(x)$							
x	1	0	$-0,5$	$-0,75$	$-0,9$	$-0,99$	$-0,999$ ...
$f(x)$							

Observamos que à medida que x se aproxima de -1, $(x+1)^2$ se aproxima de zero, e consequentemente $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ assume valores cada vez maiores. Assim, os valores de $f(x)$ não tendem a um número. Portanto, **não existe** $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{1}{(x+1)^2}$. Para indicar este comportamento usamos a notação:

$$\lim_{x\to -1} \frac{1}{(x+1)^2} = +\infty.$$

Isso não significa considerar $+\infty$ como um número. Tampouco significa que o limite exista. É simplesmente uma maneira de expressar uma forma particular da não-existência do limite, ou seja, $f(x)$ assume valores tão grandes quanto quisermos, bastando para isso escolhermos os valores de x suficientemente próximos de -1.

Definição 3.2 *Escrevemos*

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

para indicar que os valores de $f(x)$ tornam-se arbitrariamente grandes, ao tomarmos x suficientemente próximo de a. Veja Figura 3.7

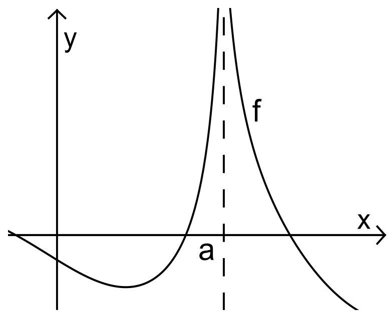


Figura 3.7:

Analogamente, se a função torna-se grande em valor absoluto, porém negativa, quando x se aproxima de a, seu significado está na Definição 3.3.

Definição 3.3 *Escrevemos*

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

para indicar que os valores de $f(x)$ tornam-se arbitrariamente grandes (em módulo), porém negativos, ao tomarmos x suficientemente próximo de a. Veja Figura 3.8

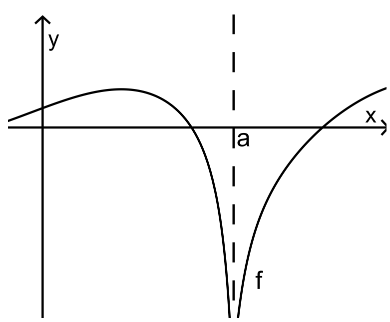


Figura 3.8:

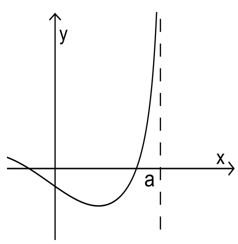
Observação 3.1 *Definições similares podem ser dadas no caso de limites laterais:*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

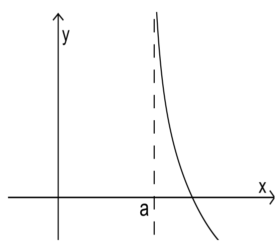
Definição 3.4 *A reta $x = a$ é chamada **assíntota vertical** da curva $y = f(x)$ se pelo menos uma das seguintes condições estiver satisfeita:*

$$i)\ \lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty \qquad ii)\ \lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$$

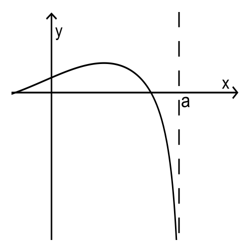
$$iii)\ \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \qquad iv)\ \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$



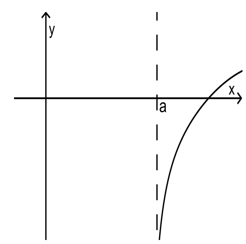
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$

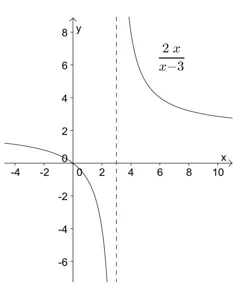


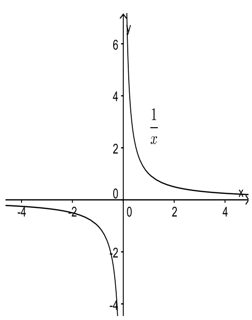
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

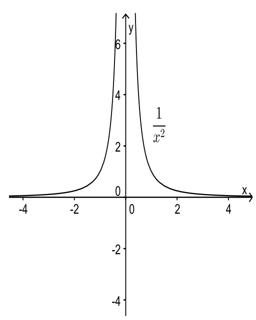
Exercício 3: Analisando os gráficos abaixo encontre as assíntotas verticais das curvas, calculando o valor dos limites:

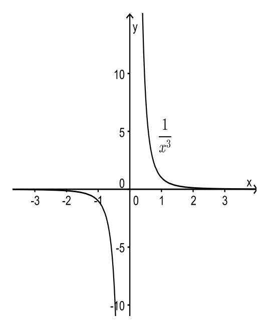
$a)\ \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{2x}{x-3}$ $\quad b)\ \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{2x}{x-3}$ $\quad c)\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}$ $\quad d)\ \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x}$

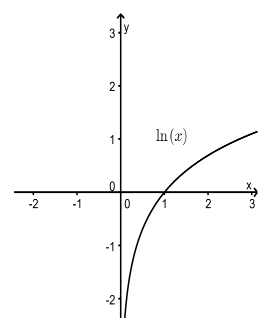
$e)\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^2}$ $\quad f)\ \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^2}$ $\quad g)\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^3}$ $\quad h)\ \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^3}$ $\quad i)\ \lim\limits_{x\to 0^+} ln(x)$











Teorema 3.2 *: Se r é um inteiro positivo qualquer então*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^r} = +\infty \qquad e \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^r} = \begin{cases} -\infty, & se \;\; r \text{ é ímpar} \\ +\infty, & se \;\; r \text{ é par} \end{cases}$$

Teorema 3.3 *: Se* a *é um número real qualquer, e se* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = c$*, onde* c *é uma constante diferente de zero, então*

I) Se $c > 0$ *e se* $f(x) \to 0$ *através de valores positivos de* $f(x)$, $\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$

II) Se $c > 0$ *e se* $f(x) \to 0$ *através de valores negativos de* $f(x)$, $\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$

III) Se $c < 0$ *e se* $f(x) \to 0$ *através de valores positivos de* $f(x)$, $\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$

IV) Se $c < 0$ *e se* $f(x) \to 0$ *através de valores negativos de* $f(x)$, $\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$

O resultado também é válido se $x \to a$ for substituido por $x \to a^+$, $x \to a^-$.

Exemplo 3.22 *Calcule* $\lim_{x\to 1^-} \frac{2x}{x-1}$

Exemplo 3.23 *Calcule* $\lim_{x\to 3^+} \frac{x^2+x+2}{x^2-2x-3}$

Teorema 3.4 *Seja c é uma constante qualquer, então*

i) *se* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ *e* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, *então* $\lim\limits_{x\to a}[f(x) + g(x)] = +\infty$

ii) *se* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ *e* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, $\lim\limits_{x\to a}[f(x) + g(x)] = -\infty$

O teorema continua válido se "$x \to a$" for substituido por "$x \to a^+$" ou "$x \to a^-$."

Exemplo 3.24 *Calcule* $\lim\limits_{x\to 2^+} \left[\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x+2}\right]$.

Teorema 3.5 *Se* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ *e* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, *$c$ uma constante não-nula, então*

i) *se* $c > 0$, *então* $\lim\limits_{x\to a} f(x).g(x) = +\infty$;

ii) *se* $c < 0$, *então* $\lim\limits_{x\to a} f(x).g(x) = -\infty$.

O teorema continua válido se "$x \to a$" for substituido por "$x \to a^+$" ou "$x \to a^-$."

Exemplo 3.25 *Calcule* $\lim\limits_{x\to 3} \left[\dfrac{5}{(x-3)^2} \cdot \dfrac{x+4}{x-4}\right]$.

Teorema 3.6 *Se* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ *e* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, *$c$ uma constante não-nula, então*

i) *se* $c > 0$, *então* $\lim\limits_{x\to a} f(x).g(x) = -\infty$;

ii) *se* $c < 0$, *então* $\lim\limits_{x\to a} f(x).g(x) = +\infty$.

O teorema continua válido se "$x \to a$" for substituido por "$x \to a^+$" ou "$x \to a^-$."

Exemplo 3.26 *Calcule* $\lim\limits_{x\to -2^-} \left[\dfrac{5}{x+2} \cdot \dfrac{4}{x-4}\right]$.

3.5 Limites no Infinito

Anteriormente estudamos limites infinitos, vimos que à medida que tomávamos x tendendo a um número a , os valores de $f(x)$ ficavam arbitrariamente grandes (em módulo). Vamos agora tornar x arbitrariamente grande (em módulo) e ver o que acontece com $f(x)$.

Consideremos a função definida por $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$ e observemos as tabelas a seguir:

x	$f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$
0	0
1	1
2	$1,6$
3	$1,8$
4	$1,882353$
5	$1,923077$
10	$1,980198$
100	$1,999800$
1000	$1,999998$

x	$f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$
0	0
-1	1
-2	$1,6$
-3	$1,8$
-4	$1,882353$
-5	$1,923077$
-10	$1,980198$
-100	$1,999800$
-1000	$1,999998$

Observemos que quando x cresce, tomando valores positivos, $f(x)$ se aproxima de 2. Analogamente, quando x decresce, tomando valores negativos, $f(x)$ se aproxima de 2.

A figura abaixo mostra um esboço do gráfico desta função:

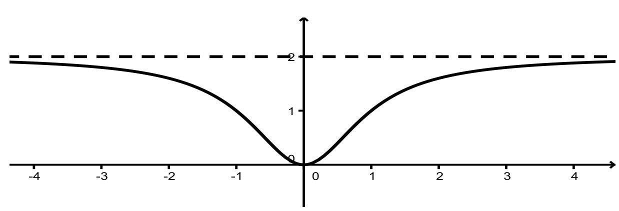


Figura 3.9:

.

Definição 3.5 *Seja f uma função definida em algum intervalo $(a, +\infty)$. Então*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

se os valores de $f(x)$ ficam arbitrariamente próximos de L tomando x suficientemente grandes.

Observemos as figuras a seguir:

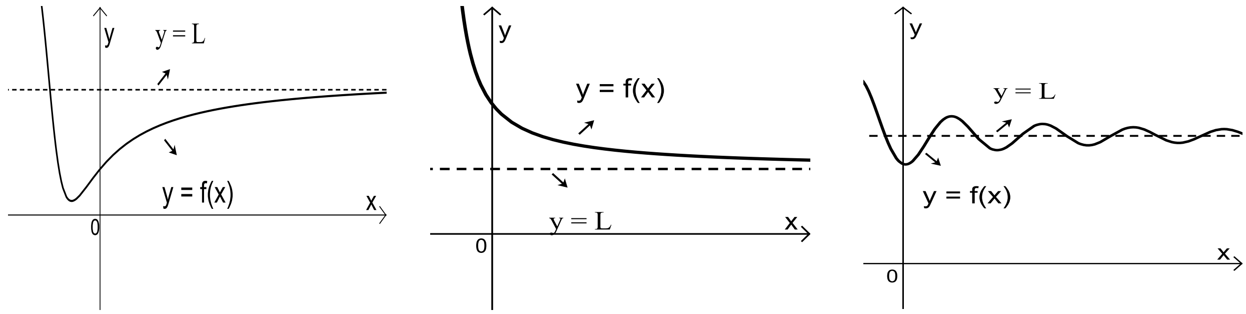


Figura 3.10:

.

Definição 3.6 *Seja f uma função definida em algum intervalo $(-\infty, a)$. Então*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

se os valores de $f(x)$ ficam arbitrariamente próximos de L tomando x suficientemente grande em valor absoluto, mas negativos.

Observemos as figuras a seguir:

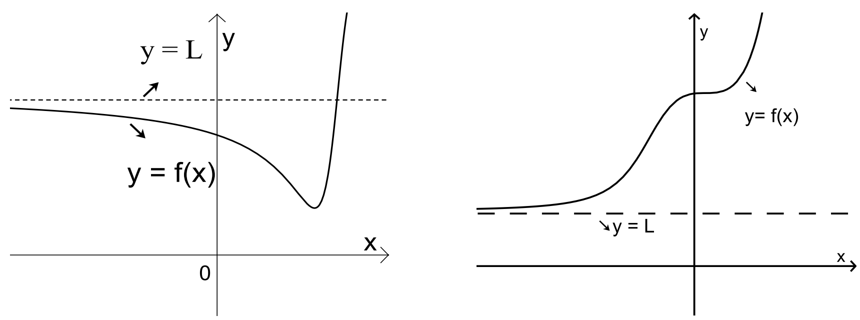


Figura 3.11:

.

Definição 3.7 *A reta $y = L$ é chamada* ***assíntota horizontal*** *da curva $y = f(x)$ se*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \text{ e para um número } N, \text{ se } x > N \text{ então } f(x) \neq L$$

ou

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \text{ e para um número } N, \text{ se } x < N \text{ então } f(x) \neq L.$$

Exemplo 3.27 *Observando o gráfico da função* $f(x) = \dfrac{1}{x}$, *determine* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ *e* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

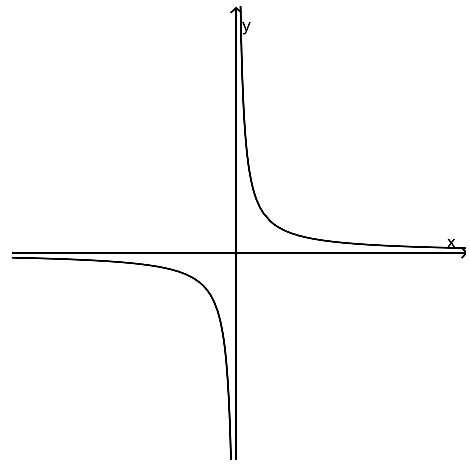


Figura 3.12:

.

Teorema 3.7 *Se r for um inteiro positivo qualquer então*

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^r} = 0$

ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^r} = 0$

O Teorema 3.7 é útil para o estudo de limites de funções racionais. Especificamente, para achar $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ para uma função racional f, primeiro dividimos numerador e denominador de $f(x)$ por x^n, em que n é a mais alta potência de x que aparece no denominador, e em seguida aplicamos os teoremas sobre limites.

Exemplo 3.28 *Calcule:*

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x - 3}{2x + 5}$ 2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2 - x + 5}{4x^3 - 1}$ 3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x + 4}{\sqrt{2x^2 - 5}}$

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x + 4}{\sqrt{2x^2 - 5}}$ 5) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$ 6) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x$

3.6 Limites Infinitos no Infinito

Usamos a notação

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

para indicar que os valores de $f(x)$ tornam-se grandes quando x se torna grande. Analogamente podemos ter:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$$

Teorema 3.8

a) $$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)+g(x)] = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)g(x)] = +\infty \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)+g(x)] = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)g(x)] = +\infty \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} [f(x)g(x)] = -\infty$$

d) $$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L, \ L \text{ real}, \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)+g(x)] = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)g(x)] = +\infty, \ se\ L > 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)g(x)] = -\infty, \ se\ L < 0 \end{cases}$$

e) $$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L, \ L \text{ real}, \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)+g(x)] = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)g(x)] = -\infty, \ se\ L > 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)g(x)] = +\infty, \ se\ L < 0 \end{cases}$$

Exemplo 3.29 *Calcule:*

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+3x-1}{2x^2+x+1}$ *b)* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3-3x^2+1}{2x^2+1}$

3.7 Continuidade de Funções

Ao estudarmos limites na seção anterior, vimos que $\lim_{x \to a} f(x)$ pode existir mesmo que f não esteja definida no ponto a. Se f está definida no ponto a e $\lim_{x \to a} f(x)$ existe, este limite pode ou não ser igual a $f(a)$. Se $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, então dizemos que f é contínua em a, de acordo com a Definição 3.8.

Definição 3.8 *Dizemos que uma função f é **contínua** no número a se, e somente se, as seguintes condições forem satisfeitas:*

i) *$f(a)$ existe;*

ii) *$\lim_{x \to a} f(x)$ existe;*

iii) *$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.*

*Se uma ou mais de uma dessas condições não forem verificadas em a, a função f será **descontínua** em a.*

As figuras a seguir mostrem esboços de gráficos de funções **descontínuas em a**.

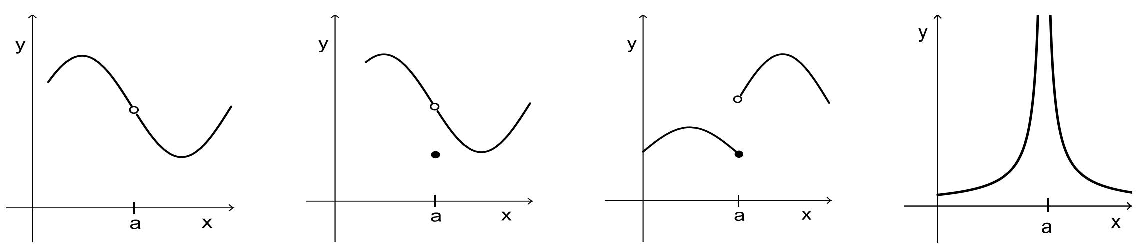


Figura 3.13:

.

Teorema 3.9 *Se f e g forem funções contínuas em um número a, e k uma constante, então $f + g$,*

$f - g, f.g$ e kf são funções contínuas em a; f/g será contínua em a, desde que $g(a) \neq 0$.

Teorema 3.10 *As seguintes funções são contínuas em todos os pontos do seu domínio:*

- *funções polinomiais* • *funções racionais*
- *funções trigonométricas* • *funções trigonométricas inversas*
- *funções exponenciais* • *funções logarítmicas*

Exemplo 3.30 *Verifique se a função f é contínua em $x = 1$:*

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & se \;\; x \neq 1 \\ 2, & se \;\; x = 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & se \;\; x \neq 1 \\ 2, & se \;\; x = 1 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & se \;\; x \leq 1 \\ x^2, & se \;\; x > 1 \end{cases}$

Limite de Função Composta

Sejam f e g duas funções tais que $Im(f) \subset D(g)$. Queremos estudar o limite

$$\lim_{x \to a} g(f(x)).$$

supondo que $\lim_{x \to a} f(x) = b$ e considerando $u = f(x)$ é razoável esperar que

$$\lim_{x \to a} g(f(x)) = \lim_{u \to b} g(u) \tag{3.1}$$

Assim temos o seguinte resultado:

Teorema 3.11 *Se* $\lim_{x\to a} f(x) = b$ *e se a função* g *for contínua em* b,

$$\lim_{x\to a}(g \circ f)(x) = g(b)$$

ou, equivalentemente,

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(\lim_{x\to a} f(x))$$

Exemplo 3.31 *Calcule* $\lim_{x\to 1}\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x-1}}$

Teorema 3.12 *(**Teorema do Confronto/Teorema do Sanduíche**): Se as funções* f, g *e* h *estão definidas em algum intervalo aberto* I *contendo* a, *exceto possivelmente em* a, *com* $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *para todo* $x \neq a$ *no intervalo* I *e se* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$, *então* $\lim_{x\to a} g(x) = L$.

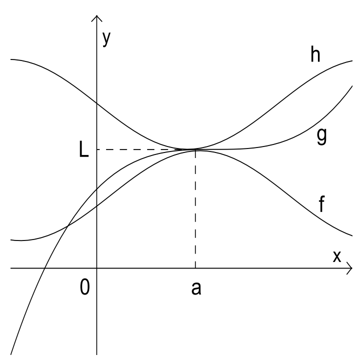


Figura 3.14:

.

Exemplo 3.32 *Mostre que* $\lim_{x\to 0} x^2 sen\dfrac{1}{x} = 0$

3.8 Limites Fundamentais

1. $\lim_{x\to 0} \frac{senx}{x} = 1$ (Prova em sala)

2. $\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

   Para análise de 2, observemos a tabela

x	$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
1	2
10^1	$(1,1)^{10}$
10^2	$(1,01)^{100}$
10^3	$(1,001)^{1.000}$
10^4	$(1,0001)^{10.000}$
10^5	$(1,00001)^{100.000}$
$\vdots$	$\vdots$
10^9	$(1,000000001)^{10^9}$

   Conclusão: $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

3. $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

   Fazendo a mudança de variável: $x = \frac{1}{y}$, temos $x \to 0^+ \Rightarrow y \to +\infty$. Logo

   $\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e$

4. $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}$ =ln a, $(a>0, a\neq 1)$.

5. $\lim_{x\to 0} \frac{1-cosx}{x} = 0$

Exercícios - Capítulo 3

Exercício 3.1 *Determine o valor do limite, se existir:*

$a)\ \lim_{x\to -1}(3x^2-7x-4)$ $\quad b)\ \lim_{x\to 6}\dfrac{x^2-12x+36}{x-5}$ $\quad c)\ \lim_{x\to -2}\sqrt{5x^2+3x+1}$

$d)\ \lim_{x\to -3} log(x^4-3x+10)$ $\quad e)\ \lim_{x\to \pi} cosx.sen(x+\pi)$ $\quad f)\ \lim_{x\to -\pi} e^{senx}$

$g)\ \lim_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2(x-3)}-2}{x-5}$ $\quad h)\ \lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ $\quad i)\ \lim_{x\to 2}\dfrac{x^2+5x-14}{x-2}$

$j)\ \lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-6x+9}{x-3}$ $\quad l)\ \lim_{x\to -2}\dfrac{2x^2+x-6}{x+2}$ $\quad m)\ \lim_{h\to 0}\dfrac{(a+h)^2-a^2}{h}$

$n)\ \lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{16-x}-4}{x}$ $\quad o)\ \lim_{x\to 9}\dfrac{x^2-9x}{\sqrt{x}-3}$ $\quad p)\ \lim_{h\to 0}\dfrac{h}{a-\sqrt{a^2+h}}, a>0$

$q)\ \lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$ $\quad r)\ \lim_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2}{x-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$ $\quad s)\ \lim_{x\to 1/2}\dfrac{2x^2+5x-3}{6x^2-7x+2}$

$t)\ \lim_{x\to -8}\dfrac{\sqrt[3]{x}+2}{x+8}$ $\quad u)\ \lim_{x\to 64}\dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$ $\quad v)\ \lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[6]{x}-1}$

$x)\ \lim_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt[3]{3x-5}-1}$

Exercício 3.2 *Determine, se existir, o valor dos limites:*

$$a)\ \lim_{x\to 1^+} f(x), \lim_{x\to 1^-} f(x), \lim_{x\to 1} f(x),\ se\ \ f(x)=\begin{cases} 2, & se \quad x<1 \\ -1, & se \quad x=1 \\ -3, & se \quad 1<x \end{cases}$$

$$b)\ \lim_{t\to -4^+} f(t), \lim_{t\to -4^-} f(t), \lim_{t\to -4} f(t),\ se\ \ f(t)=\begin{cases} t+4, & se \quad t\le -4 \\ 4-t, & se \quad t>-4 \end{cases}$$

$$c)\ \lim_{x\to 1} f(x),\ se\ \ f(x)=\begin{cases} 3x+1, & se \quad x\neq 1 \\ 0, & se \quad x=1 \end{cases}$$

d) $\lim_{x\to 2} f(x)$, *se* $f(x) = \begin{cases} x^3, & se \quad x \leq 2 \\ 4-2x, & se \quad x > 2 \end{cases}$

e) $\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$, *se* $f(x) = \begin{cases} x^2, & se \quad x \leq 1 \\ 2x-1, & se \quad x > 1 \end{cases}$

Exercício 3.3 *Dada* $f(x) = \begin{cases} 3x+2, & se\ x < 4 \\ 5x+k, & se\ 4 \leq x \end{cases}$. *Ache o valor de k para o qual* $\lim_{x\to 4} f(x)$ *existe.*

Exercício 3.4 *Dada* $f(x) = \begin{cases} x^2, & se\ x \leq -2 \\ ax+b, & se\ -2 < x < 2 \\ 2x-6, & se\ 2 \leq x \end{cases}$. *Ache os valores de a e b, tais que* $\lim_{x\to -2} f(x)$ *e* $\lim_{x\to 2} f(x)$ *ambos existam.*

Exercício 3.5 *Um país taxa em 15% a renda de um indivíduo até R\$20.000 e em 20% a renda acima daquele limite.*

a) Determine uma função T definida por partes para o imposto total sobre uma renda de x reais.

b) Ache $\lim_{x\to 20.000^-} T(x)$ *e* $\lim_{x\to 20.000^+} T(x)$

Exercício 3.6 *As taxas para despachar cargas por navio são frequentemente baseadas em fórmulas que oferecem um preço menor por quilo quando o tamanho da carga é maior. Suponha que x quilos sejam o peso de uma carga, $C(x)$ seja o seu custo total e*

$$C(x) = \begin{cases} 0,80x, & se\ 0 < x \leq 50 \\ 0,70x, & se\ 50 < x \leq 200 \\ 0,65x, & se\ 200 < x \end{cases}$$

a) Faça um esboço do gráfico de C.

b)Ache cada um dos seguintes limites:

i) $\lim\limits_{x\to 50^-} C(x)$ *ii)* $\lim\limits_{x\to 50^+} C(x)$ *iii)* $\lim\limits_{x\to 200^-} C(x)$ *iv)* $\lim\limits_{x\to 200^+} C(x)$

Exercício 3.7 *Dada* $f(x) = \dfrac{|x-4|}{x-4}$, *ache cada limite, se existir:*

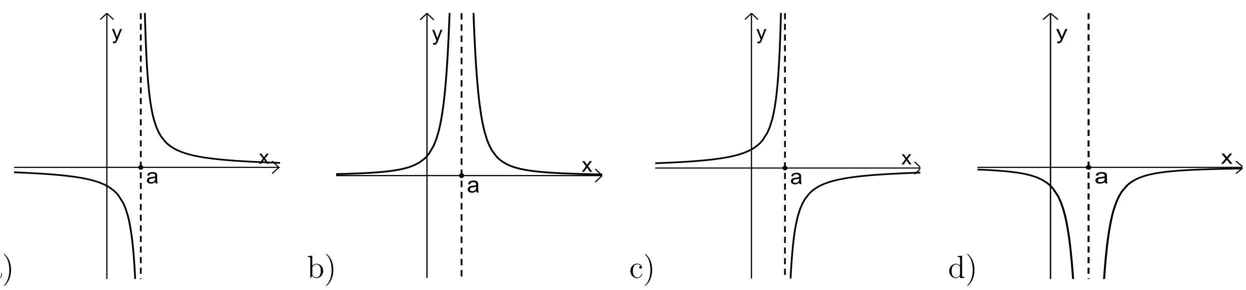
a) $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$

c)$\lim\limits_{x\to 4} f(x)$

Exercício 3.8 *Se* $g(x) = \sqrt{5-x}$, $\lim\limits_{x\to 5} g(x)$ *existe?*

Exercício 3.9 *Para as funções dos gráficos abaixo, determine os limites laterais da função em $x = a$.*



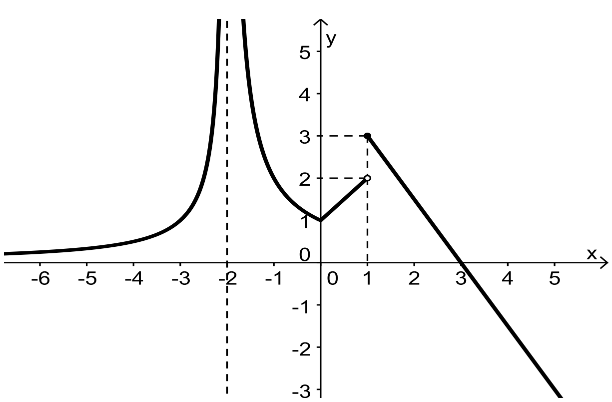
a) $f(x) = \dfrac{1}{x-a}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{(x-a)^2}$

c) $f(x) = -\dfrac{1}{x-a}$

d) $f(x) = -\dfrac{1}{(x-a)^2}$

Exercício 3.10 *Dado o gráfico da função f abaixo, determine:*



a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ *b)* $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ *c)*$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$ *e)* $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$ *f)* $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

g) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ *h)* $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ *i)*$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

j) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ *k)* $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ *l)*$\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

Exercício 3.11 *Determine o valor do limite, se existir:*

a) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x+2}{x^2-4}$ *b)* $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x+2}{x^2-4}$ *c)* $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{3+x^2}}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}$ *e)* $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$ *f)* $\lim\limits_{x\to -4^-} \left(\dfrac{2}{x^2+3x-4}-\dfrac{3}{x+4}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x+1}{5x-2}$ *h)* $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x+7}{4-5x}$ *i)* $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{7x^2-2x+1}{3x^2+8x+5}$

j) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x+4}{3x^2-5}$ *k)* $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2-3x}{x+1}$ *l)* $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{4x^3+2x^2-5}{8x^3+x+2}$

m) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^3-4}{5x+3}$ *n)* $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(3x+\dfrac{1}{x^2}\right)$ 0) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x+4}$

p) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x+5}$ *q)* $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ *r)* $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{3x^2+x}-2x\right)$

s) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^x$ *t)* $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$ *u)* $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x+1}$

v) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$ *w)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{x}$ *x)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5^x-1}{x}$

y) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen\,3x}{sen\,4x}$ *z)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen\,2x}{x}$ *α)* $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{5^x-25}{x-2}$

Exercício 3.12 *Determine, se existirem, as assíntotas verticais e horizontais do gráfico de função f e esboce o gráfico.*

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$ *b)* $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$ *c)* $f(x) = \dfrac{x^2+3x+2}{x^2+2x-3}$

d) $f(x) = \dfrac{4x^2+x}{x^2-9}$ *e)* $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2-3x+7$ *f)* $f(x) = \dfrac{x}{7-x}$

g) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$ *h)* $f(x) = 2^x+1$ *i)* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+2}, & se \quad x < -2 \\ x^2-5, & se \quad -2 < x \leq 3 \\ \sqrt{x+13}, & se \quad x > 3 \end{cases}$

Exercício 3.13 *Verifique se cada função a seguir é contínua no ponto a indicado:*

a)$f(x) = \begin{cases} x+3, & se \quad x \leq 1 \\ 4, & se \quad x > 1 \end{cases} , \quad a = 1$ *b)*$f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & se \quad x < 2 \\ x-5, & se \quad x > 2 \\ 0 & se \quad x = 2 \end{cases} , \quad a = 2$

c) $f(x) = \dfrac{3}{x+2} , \quad a = -2$ *d)* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3}, & x \neq 3 \\ 4, & x = 3 \end{cases} , \quad a = 3$

Capítulo 4

Derivadas

Neste capítulo introduziremos o conceito de derivada, considerando primeiro sua interpretação geométrica. A seguir daremos a definição de derivada e as regras de derivação. Por último apresentaremos as aplicações de derivada no cálculo de taxa de variação e no esboço de gráficos.

4.1 A Reta Tangente

Consideremos uma função f definida no intervalo I e $P(a, f(a))$ e $Q(x, f(x))$ dois pontos distintos do gráfico da função, como mostra a Figura 4.1.

Para determinarmos a reta tangente ao gráfico de f no ponto $P(a, f(a))$, primeiramente calculamos a inclinação da reta secante s :

$$m_s = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

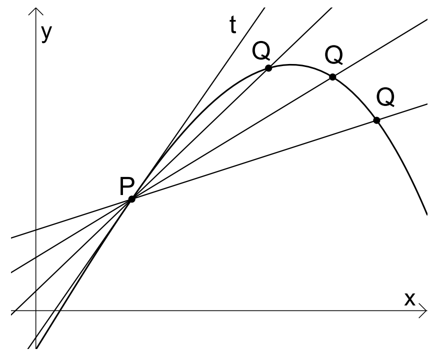


Figura 4.1:
.

Suponhamos agora que, mantendo P fixo, Q se mova sobre o gráfico em direção a P. À medida que Q aproxima-se de P, a inclinação da reta secante tende para um valor limite. Este valor limite, se existir, é chamado de coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função no ponto P. Observe a Figura 4.2

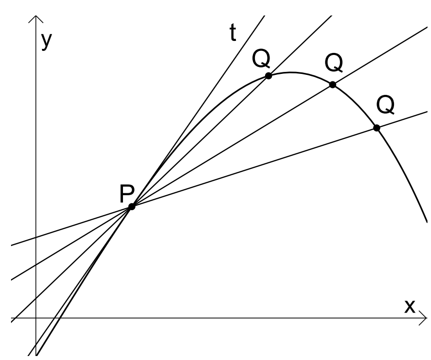


Figura 4.2:
.

Observação 4.1 *Fazendo $x = a + h$ na Figura 4.1 temos a seguinte definição :*

Definição 4.1 *Seja f uma função contínua em* a. *A **reta tangente** ao gráfico de f no ponto $P(a, f(a))$ é:*

ii) a reta que passa por P e tem inclinação $m = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, se o limite existe;

ii) a reta $x = a$ se

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = +\infty \text{ ou } -\infty \text{ e } \qquad \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = +\infty \text{ ou } -\infty$$

Observação 4.2 *Se i) e nem ii) da Definição 4.1 forem verdadeiras, então não existira reta tangente ao gráfico de f no ponto $P(a, f(a))$.*

Exemplo 4.1 *Encontre a equação da reta tangente à parábola $f(x) = x^2$ nos pontos $P_1(1, 1), P_2(0, 0)$, e $P_3(-1, 1)$.*

Exemplo 4.2 *Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função* $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *no ponto* $P(1,1)$.

Exemplo 4.3 *Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função* $f(x) = \sqrt[3]{x}$ *no ponto* $P(0,0)$.

4.2 A Derivada

Definição 4.2 *A derivada de uma função no ponto* a, *denotada por* $f'(a)$ *(lê-se:* f *linha de* a*), é*

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

quando o limite existe.

Exemplo 4.4 *Encontre a derivada da função* $f(x) = x^2 - 5x + 6$ *em* $x = a$ *e determine* $f'(2)$.

Definição 4.3 *Se a função f está definida em a então a* **derivada à direita** *de f em a, denotada por $f'_+(a)$ é definida por*

$$f'_+(a) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}, \text{ caso o limite exista.}$$

Analogamente, se a função f está definida em a então a **derivada à esquerda** *de f em a, denotada por $f'_-(a)$ é definida por*

$$f'_-(a) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}, \text{ caso o limite exista.}$$

Dizemos que uma função é derivável em um ponto quando as derivadas laterais existem e são iguais.

Quando as derivadas laterais existem e são diferentes em um ponto a dizemos que a função não é derivável em a.

Definição 4.4 *A derivada de uma função é a função, denotada por f', tal que*

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

se o limite existir, com $x \in D(f)$.

Observação 4.3 *Na definição (4.4) denotando a variação h como Δx, a variação em y como Δy e escrevendo $\dfrac{dy}{dx}$ em lugar de $f'(x)$, temos*

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Notemos que $\dfrac{dy}{dx}$ é um símbolo para derivada e não deve ser considerado como uma razão. Na verdade $\dfrac{d}{dx}$ deve ser considerado um símbolo para o operador derivada. Isto é,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(y),$$

representa a derivada de y em relação a x.

Outras notações para derivada de $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) : f'(x),\ D_x f(x),\ D_x y$ *e* y'

Exemplo 4.5 *Encontre* $\dfrac{dy}{dx}$ *se* $y = \sqrt{x-3}$.

Teorema 4.1 *Se uma função* f *for derivável em* a, *então* f *será contínua em* a.

Observação 4.4 *A recíproca do Teorema 4.1 não é verdadeira, isto é, nem toda função contínua em* a, *é derivável em* a.

4.3 Teoremas sobre Derivação

Teorema 4.2 *Se* $f(x) = c$, c *uma constante real, então* $f'(x) = 0$, *para todo* x.

Exemplo *Se* $f(x) = 5$, *então* $f'(x) = 0$.

Teorema 4.3 *Se* $f(x) = x^n$, *então* $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$, *para todo* n *inteiro positivo.*

Exemplo *Se* $f(x) = x^3$, *então*

$$f'(x) = 3x^2.$$

Teorema 4.4 *Se* $f(x) = k \cdot g(x)$, k *constante, então* $f'(x) = k \cdot g'(x)$.

Exemplo *Se* $f(x) = 5x^7$, *então*

$$f'(x) = 35x^6.$$

Teorema 4.5 *Se* $h(x) = f(x) + g(x)$ *então, se existirem* $f'(x)$ *e* $g'(x)$ *teremos:*

$$h'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Este teorema pode ser aplicado a um número qualquer, finito, de funções.

Exemplo *Se* $f(x) = 7x^4 - 2x^3 + 8x + 5$*, então*

$$f'(x) = 28x^3 - 6x^2 + 8.$$

Teorema 4.6 *Se* $h(x) = f(x).g(x)$ *então, se existirem* $f'(x)$ *e* $g'(x)$ *teremos:*

$$h'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x).$$

Exemplo *Encontre* $h'(x)$ *se* $h(x) = (2x^3 - x^2)(3x^5 + x^2)$

Teorema 4.7 *Se* $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$*, onde* $g(x) \neq 0$ *então, se existirem* $f'(x)$ *e* $g'(x)$ *teremos:*

$$h'(x) = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Exemplo *Encontre* $h'(x)$ *se* $h(x) = \dfrac{2x^3 + 4}{x^2 - x + 1}$.

Teorema 4.8 *Se $f(x) = x^{-n}$, onde $-n$ é um inteiro negativo e $x \neq 0$, então $f'(x) = -n \cdot x^{-n-1}$.*

Exemplo *Se $f(x) = \dfrac{3}{x^5}$, então $f'(x) = -\dfrac{15}{x^6}$.*

4.4 Derivadas de Funções Trigonométricas

Derivada da função seno

Para encontrar a derivada da função ***seno*** usaremos a identidade trigonométrica:

$sen(a + b) = sen\, a.cos\, b + cos\, a.sen\, b$.

Teorema 4.9 *Se $f(x) = sen\, x$ então, $D_x(sen\, x) = cos\, x$.*

Exemplo 4.6 *Determine $f'(x)$ sendo, $f(x) = x^2\, sen\, x$.*

Derivada da função cosseno

Para encontrar a derivada da função ***cosseno***, aplicaremos a identidade trigonométrica:

$cos(a+b) = cos\,a.cos\,b \,-\, sen\,a.sen\,b$

Teorema 4.10 *Se* $f(x) = cos\,x$ *então,* $D_x(cos\,x) = -sen\,x$.

Exemplo 4.7 *Determine* $\dfrac{dy}{dx}$, *se* $y = \dfrac{sen\,x}{1-2cos\,x}$.

Exercício 4: Verifique que a derivada das funções $tg\,x$, $cotg\,x$, $sec\,x$ e $cossec\,x$ são dadas por:

$a)$ $D_x(tg\,x) = sec^2\,x$

$b)$ $D_x(cotg\,x) = -cosec^2\,x$

$c)$ $D_x(sec\,x) = sec\,x.tg\,x$

$d)$ $D_x(cossec\,x) = -cossec\,x.cotg\,x$

4.5 A Derivada das Funções Exponenciais e Logarítmicas

Para determinarmos a derivada das funções exponenciais e logarítmicas usaremos limites fundamentais estudados anteriormente:

Derivada da função exponencial

Teorema 4.11 *Se* $f(x) = a^x$ *(com* $a > 0$ *e* $a \neq 1$ *) então,* $f'(x) = a^x \ln a$*.*
Em particular, se $f(x) = e^x$ *então,* $f'(x) = e^x$*.*

Derivada da função logarítmica

Teorema 4.12 *Se* $f(x) = \log_a x$ *(com* $a > 0$ *e* $a \neq 1$ *) então,* $f'(x) = \dfrac{1}{x \, . \ln a}$*.*
Em particular, se $f(x) = \ln x$ *então,* $f'(x) = \dfrac{1}{x}$*.*

Exemplo 4.8 *Determine* $f'(x)$ *se* $f(x) = \log_2 x$*.*

4.6 A Derivada de uma Função Composta e a Regra da Cadeia

Para determinar a derivada de uma função composta usaremos um dos importantes teoremas do Cálculo chamado de Regra da Cadeia. Considerando f e g duas funções deriváveis tais que $Im\,(g) \subset D\,(f)$, podemos apresentar a **Regra da Cadeia**, que nos dá a derivada da função composta $f \circ g$ em termos das derivadas de f e g.

Teorema 4.13 *(**Regra da Cadeia**) Se f e g são funções tais que $Im\,(g) \subset D\,(f)$ com g derivável em x e f derivável em $g(x)$ então, a função composta $f \circ g$ é derivável em x, e*

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\,.\,g'(x).$$

Fazendo $u = g(x)$ e $y = f(u)$, o teorema é dado por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$

Ou ainda,

$$D_x[f(u)] \; = \; f'(u) D_x u$$

Exemplo 4.9 *Calcule* $\dfrac{d}{dx}\left(sen(x^2+3)\right)$, *considerando* $f(x) = sen\, x$ *e* $g(x) = x^2 + 3$.

Exemplo 4.10 *Calcule* $\dfrac{d}{dx}(2x^3 - 5x^2 + 4)^{10}$, *considerando* $f(x) = x^{10}$ *e* $g(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4$.

Exemplo 4.11 *Calcule* $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{2}{x-1}\right)^5$, *considerando* $f(x) = x^5$ *e* $g(x) = \dfrac{2}{x-1}$.

Teorema 4.14 *Se $u = g(x)$ é uma função derivável e n é um número inteiro não nulo então,*

$$\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n.[g(x)]^{n-1}.g'(x).$$

Para provarmos este resultado basta usarmos a Regra da Cadeia e os Teoremas 4.3 e 4.8.

Exemplo 4.12 *Dada $f(x) = sen\, 2x$, determine $f'(x)$.*

Exemplo 4.13 *Dada $f(t) = tg(3t^2 + 2t)$, determine $f'(t)$.*

Exemplo 4.14 *Dada $f(x) = sec^2(3x)$, determine $f'(x)$.*

Exemplo 4.15 *Dada $f(x) = sec^4(2x^2)$, determine $f'(x)$.*

Exemplo 4.16 *Derive $y = sen(x^2)$ e $y = sen^2(x)$.*

Exemplo 4.17 *Derive $y = e^{sen\, x}$ e $y = e^{sec\, 3x}$.*

4.7 Derivação Implícita

Até agora utilizamos funções da forma $y = f(x)$, ou seja, funções descritas expressando-se uma variável(y) **explicitamente** em termos de outra (x). Algumas funções, entretanto, são definidas **implicitamente** por uma relação entre x e y, tal como

1) $x^2 + y^2 = 1$ 2) $x.y = 1$ 3) $x^3 + y^3 = 6xy$

Nestes casos para determinarmos $y = f'(x)$ usaremos a **derivação implícita**.

A **derivação implícita** consiste em derivar os dois membros de uma equação que envolve duas variáveis, x e y, em relação a uma delas. Como em geral desejamos ter y como função de x, essa derivação é normalmente feita em relação à variável x. Após a derivação em ambos os membros, isolamos $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

Aplicando a derivação implícita nos exemplos acima temos:

1) $2x + 2y.y' = 0 \;\Rightarrow\; y' = -\dfrac{x}{y}$ 2) $1.y + x.y' = 0 \;\Rightarrow\; y' = -\dfrac{y}{x}$

3) $3x^2 + 3y^2.y' = 6(y + xy') \;\Rightarrow\; y' = \dfrac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$

Exemplo 4.18 *Encontre y' sabendo que:*

a) $sen(x + y) = y^2.cos\, x$ *b)* $x^4 + y^4 = 16$

Teorema 4.15 ***(A Regra da Potência)***

Se n for ***um número real*** *qualquer e $f(x) = x^n$ então,*

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Prova: Se $y = x^n$ então,

$$ln|y| = ln|x|^n = n\, ln|x| \qquad x \neq 0$$

Consequentemente,

$$\frac{y'}{y} = \frac{n}{x}$$

Portanto,

$$y' = nx^{n-1}.$$

Deste teorema, resultam as seguintes consequências:

Consequência 1: Se $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$, então $f'(x) = \dfrac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$, para todo n inteiro positivo.

Consequência 2: Se $f(x) = x^r$, então $f'(x) = r \cdot x^{r-1}$, para todo r racional ($r = \frac{a}{b}$, a e $b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$).

Exemplo 4.19 *Dada $f(x) = 4\sqrt[3]{x^2}$, determine $f'(x)$.*

Exemplo 4.20 *Dada $f(x) = 5\sqrt{x^2+3}$, determine $f'(x)$.*

Exemplo 4.21 *Dada* $f(x) = \sqrt[3]{(x^3+1)^4}$, *determine* $f'(x)$.

Exemplo 4.22 *Dada* $f(x) = \sqrt{2x^3 - 4x + 5}$, *determine* $f'(x)$.

Exemplo 4.23 *Dada* $g(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt[3]{3x^2-1}}$, *determine* $g'(x)$.

Exemplo 4.24 *Dada* $f(r) = \sqrt{4sen^2\, r \,+\, 9cos^2\, r}$, *determine* $f'(r)$.

4.8 Derivadas Sucessivas (Derivadas de Ordem Superior)

Se a função f for derivável, então f' será chamada a **derivada primeira** de f. Se a derivada de f' existir, ela será chamada de **derivada segunda** de f e poderá ser denotada por f'' (lemos f duas linhas) ou $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. Da mesma forma, a **derivada terceira** de f é definida como a derivada de f'', se ela existir. A derivada terceira de f é denotada por f''' (lemos f três linhas) ou $\dfrac{d^3y}{dx^3}$.

Assim, sucessivamente, para cada $n \in \mathbb{N}$, supondo definida a função $f^{\,n-1}$, se esta for derivável, temos definida *a função derivada n-ésima de* f, dada por:

$$f^{\,n}(x) = (f^{\,n-1})'(x)$$

ou seja,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left[\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right]$$

Exemplo 4.25 *Calcule todas as derivadas da função* f *dada por* $f(x) = 8x^4 + 5x^3 - x^2 + 7$

Exemplo 4.26 *Calcule*

$\frac{d^3}{dx^3}(2sen\,x\, +\, 3cos\,x\, -\, x^3)$

Exemplo 4.27 *Calcule*

$\frac{d^2y}{dx^2}$ *aplicando derivação implícita sobre a relação* $4x^2 + 9y^2 = 36$.

Aplicações da Derivada

4.9 Taxa de Variação de uma Função

Se $y = f(x)$, e se x variar de x_1 até $x_1 + \Delta x$, então y variará de $f(x_1)$ até $f(x_1 + \Delta x)$. Assim, a variação de y, denotada por Δy, é $f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$, quando a variação de x for Δx. A **taxa média de variação** de y por unidade de variação de x, quando x variar de x_1 a $x_1 + \Delta x$, será então

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

A taxa média de variação de uma função fornece a variação média da função por unidade acrescida à variável x.

Exemplo 4.28 *Suponhamos que um corpo se move em linha reta e que $s = s(t)$ represente o espaço percorrido pelo móvel até o instante t. Então, no intervalo de tempo entre t e $t + h$, o corpo sofre um deslocamento*

$$\Delta\, s = s(t + h) - s(t)$$

Definimos a **velocidade média** *nesse intervalo de tempo como o quociente:*

$$v_m = \frac{s(t + h) - s(t)}{h}$$

isto é, a **velocidade média** *é o quociente do espaço percorrido pelo tempo gasto em percorrê-lo.*

4.9.1 Taxa de Variação Instantânea de uma Função

A taxa de variação instantânea de uma função f no ponto a é o limite, quando $h \to 0$, do quociente entre a variação da função no intervalo $[a, a + h]$ e o comprimento do intervalo, isto é,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

Observe que a taxa de variação instantânea de uma função f no ponto a é a derivada de f no ponto a.

Exemplo 4.29 *Seja $V(x)cm^3$ o volume de um cubo com $x\,cm$ de lado, use a calculadora para calcular a taxa média de variação de $V(x)$ em relação a x, quando x variar de:*

a) 3 *a* $3,2$ *b)* 3 *a* $3,1$ *c)* 3 *a* $3,01$ *d)* 3 *a* $3,001$

Qual a taxa de variação instantânea de $V(x)$ em relação a x quando x é 3?

Exemplo 4.30 *No instante $t = 0$ um corpo inicia um movimento em linha reta. Sua posição no instante t é dada por $s(t) = 16t - t^2$. Determine:*

a) a velocidade média do corpo no intervalo de tempo $[2, 4]$;

b) a velocidade do corpo no instante $t = 2$;

c) a aceleração média do corpo no intervalo $[0, 4]$;

d) a aceleração no instante $t = 4$.

4.9.2 Taxas Relacionadas

Em muitos problemas, uma quantidade é dada com função de uma variável que, por sua vez, pode ser reescrita como função de sua segunda variável, muitas vezes queremos calcular a taxa de variação da quantidade original em relação à segunda variável, estes problemas são denominados **problemas de taxas relacionadas** e podem ser resolvidos com auxílio da regra da cadeia.

Exemplo 4.31 *Um estudo do meio ambiente de uma comunidade suburbana conclui que a taxa média diária de monóxido de carbono no ar é de* $c(p) = \sqrt{0,5p^2 + 17}$ *partes/milhão de habitantes, quando a população é* p *milhares de habitantes. Estima-se que daqui a* t *anos a população será* $p(t) = 3,1 + 0,1t^2$ *milhares de habitantes. Qual será a taxa de variação, em relação ao tempo, da taxa de monóxido de carbono daqui a 3 anos? (Use a regra da cadeia).*

Exemplo 4.32 *Numa certa fábrica, o custo total de fabricação de* q *unidades é*

$C(q) = 0,2q^2 + q + 900$ *reais. Sabe-se que, aproximadamente,* $q(t) = t^2 + 100t$ *unidades são produzidas durante as* t *primeiras horas da jornada de trabalho. Qual será a taxa de variação, em relação ao tempo, do custo total de fabricação 1 hora após o início do trabalho diário?*

Exemplo 4.33 *Um quadrado de lado l está se expandindo segundo a equação $l = 2 + t^2$, onde a variável t representa o tempo. Determine a taxa de variação da área desse quadrado no tempo $t = 2$.*

Exemplo 4.34 *Um tanque de água tem o formato de um cone invertido de 20 metros de altura e 5 metros de raio da base circular. O tanque tem um vazamento constante de $2\,m^3$ de água por minuto. Com que velocidade o nível de água estará descendo, quando a profundidade da água for de 8 metros?*

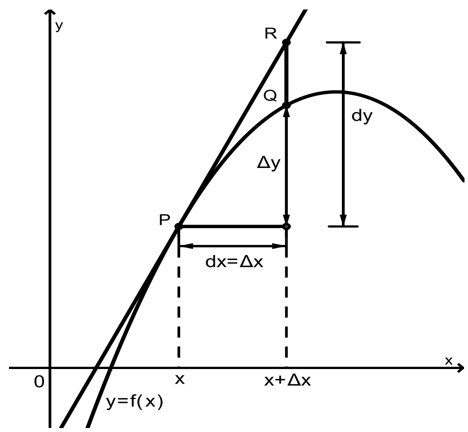
4.10 A Diferencial

Nesta seção introduzimos notação e terminologia adicionais que serão usadas em problemas envolvendo diferenciação. A nova notação permitirá encararmos $\dfrac{dy}{dx}$ como um quociente em lugar de apenas um símbolo para a derivada de y em relação a x. Vamos utilizá-la também para estimar variações de quantidades.

Consideremos uma função f derivável em x. A variação sofrida por f, quando se passa do ponto x para o ponto $x + \Delta x$ é:

$$\Delta\, y = \Delta\, f \; = \; f(x + \Delta x) - f(x)$$

Para uma melhor interpretação geométrica, observe a figura abaixo:



A reta PR, tangente ao gráfico de f no ponto $P(x, f(x))$ tem coeficiente angular $m = f'(x)$. Logo,

$$f'(x) = \frac{dy}{\Delta\, x} \quad \Longrightarrow \quad dy = f'(x).\Delta\, x$$

Fazendo, $\Delta\, x = dx$ temos: $dy = f'(x).dx$, ou seja, $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$.

Veja que esta definição coincide com a notação de derivada já utilizada. Esta nova notação permitirá encararmos $\dfrac{dy}{dx}$ como um quociente em lugar de apenas um símbolo para a derivada de f em relação a x.

4.10.1 Aplicações das Diferenciais no Cálculo de Variações

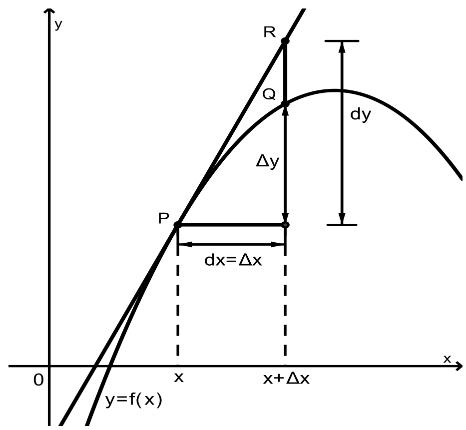


Figura 4.3:

.

Da figura podemos observar que, quanto menor for $\Delta\, x$, mais próximo dy estará de $\Delta\, y$.

Portanto, para pequenos valores de $\Delta\, x$ dizemos que: $dy \approx \Delta\, y$.

Logo, podemos utilizar a ***diferencial de f*** para calcular variações de f, para pequenas variações de x.

Definição 4.5 *Se a função f for definida por $y = f(x)$, então a **diferencial de y,** denotada por dy, será dada por*

$$dy = f'(x)\Delta x$$

onde x está no domínio de f' e Δx é um incremento arbitrário de x.

Definição 4.6 *Se a função f for definida por $y = f(x)$, então a **diferencial de x** será dada por*

$$dx = \Delta x$$

onde Δx um incremento arbitrário de x e x está no domínio de f'.

Exemplo 4.35 *Consideremos a função f dada por $f(x) = 3x^2$ e os pontos de abscissa 1 e $1,01$. Calcule:*

a) a variação de f no intervalo $[1; 1,01]$;

b) a diferencial de f no ponto de abscissa 1.

Exemplo 4.36 *Determine o acréscimo sofrido pela área de um quadrado de lado x, quando x varia de 3 para 3,01.*

Exemplo 4.37 *O raio de uma esfera tem 21 cm, com um erro de medida possível de no máximo 0,05 cm. Qual é o erro máximo cometido ao usar esse valor de raio para computar o volume da esfera?*

Exemplo 4.38 *Obtenha um valor aproximado para o volume de uma fina coroa cilíndrica de altura 12 m, raio interior 7m e espessura 0,05 m. Qual é o erro decorrente do uso de diferenciais para o cálculo aproximado do volume?*

Exemplo 4.39 *Uma caixa em forma de um cubo deve ter revestimento externo com espessura de* $1/4$ *cm. Se o lado da caixa é de* $2m$, *use diferencial para encontrar a quantidade de revestimento necessária.*

4.11 Valores Extremos das Funções e Otimização

Valor Máximo e Mínimo de uma função real f

Definição 4.7 *Uma função f tem **máximo absoluto (ou máximo global)** em c se:*

$$f(c) \geq f(x), \forall\, x \in D_f, \text{ onde } D_f \text{ é o domínio de } f.$$

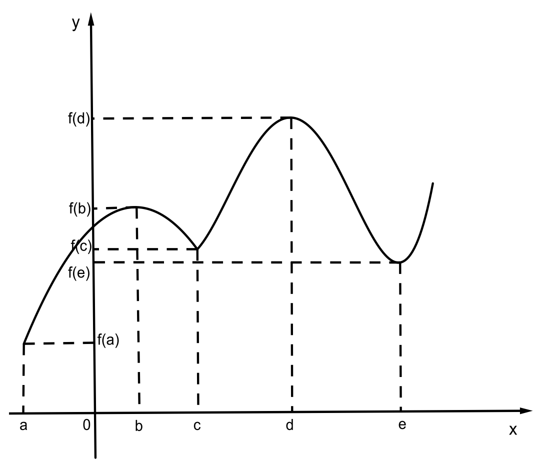
($f(c)$ é chamado de máximo absoluto de f)

*Analogamente, f tem **mínimo absoluto (ou mínimo global)** em c se:*

$$f(c) \leq f(x), \forall\, x \in D_f, \text{ onde } D_f \text{ é o domínio de } f.$$

O valor $f(c)$ é chamado de mínimo absoluto de f.

A figura abaixo mostra o gráfico de uma função f com um máximo absoluto em d e um mínimo absoluto em a . Se restringirmos nossa atenção ao intervalo $I = [a, c]$, então $f(b) \geq f(x), \forall\, x \in I$. Nesse caso, $f(b)$ é chamado de máximo local de f ou máximo relativo de f.



Definição 4.8 *Uma função f tem **máximo local (ou máximo relativo)** em c se:*

$$f(c) \geq f(x), \forall\, x \in I, \text{ onde } I \subset D_f \text{ é um intervalo aberto e } c \in I.$$

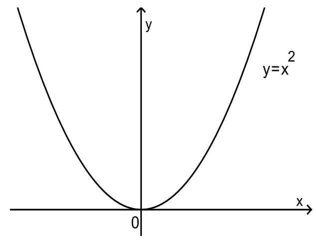
O valor $f(c)$ é chamado de máximo local de f.

*Analogamente, f tem **mínimo local (ou mínimo relativo)** em c se:*

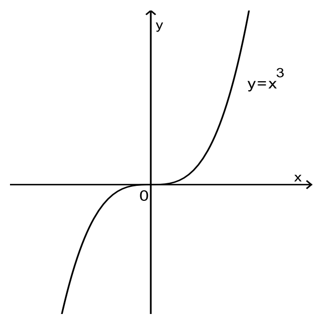
$$f(c) \leq f(x), \forall\, x \in I, \text{ onde } I \subset D_f \text{ é um intervalo aberto e } c \in I.$$

($f(c)$ é chamado de mínimo local de f)

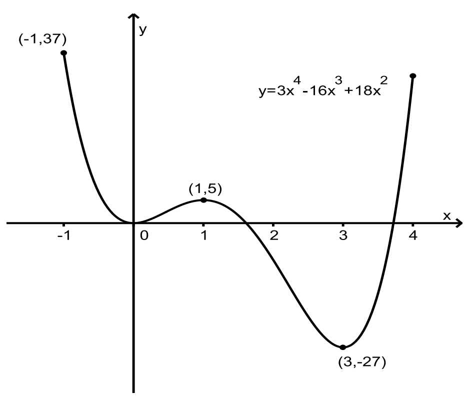
Exemplo 4.40 *Para $f(x) = x^2$ temos: $f(0) = 0$ é o mínimo absoluto (e o mínimo local) de f. No entanto, a função não tem um valor máximo.*



Exemplo 4.41 *Observando o gráfico de $f(x) = x^3$, vemos que essa função não tem um valor máximo absoluto nem um valor mínimo absoluto.*



Exemplo 4.42 *Analisando o gráfico da função $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$, $-1 \leq x \leq 4$ na figura abaixo, temos:*

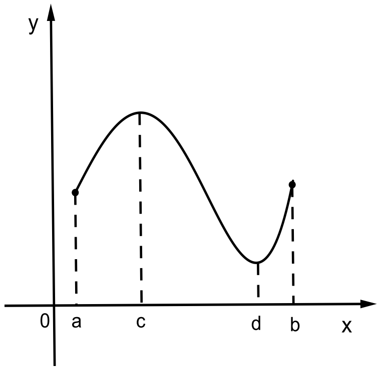


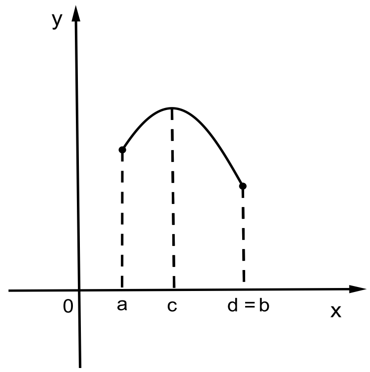
Máximo absoluto de f: *Mínimo absoluto de f:*

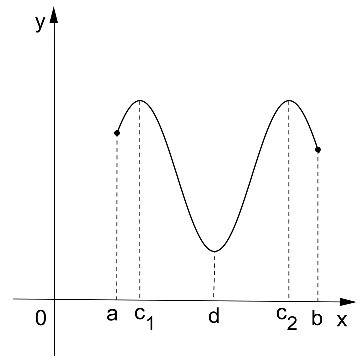
Máximo relativo de f: *Mínimo relativo de f:*

Teorema 4.16 *(Teorema do Valor Extremo)*

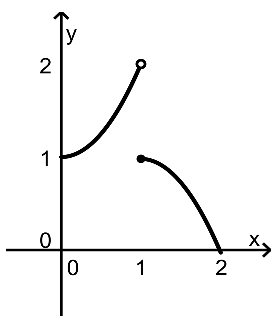
Se f for contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então f assume um valor máximo absoluto $f(c)$ e um valor mínimo absoluto $f(d)$ em algum número c e d em $[a, b]$.

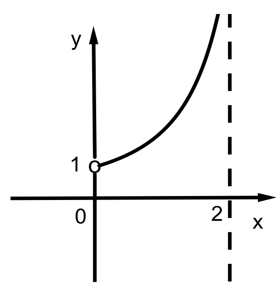






As figuras abaixo mostram que uma função pode não possuir valores extremos se for omitida alguma das hipóteses do Teorema do Valor Extremo:





Observação 4.5 *O Teorema do Valor Extremo afirma que uma função contínua em um intervalo fechado tem um valor máximo e um mínimo, contudo, não diz como encontrar esses valores extremos.*

Teorema 4.17 *(Teorema de Fermat)*

Se f tiver um máximo ou mínimo local em c e $f'(c)$ existir, então $f'(c) = 0$.

Observação 4.6 *O Teorema de Fermat nos dá uma condição suficiente (se...então) mas não necessária (se, e somente se), ou seja, mesmo quando $f'(c) = 0$, não é necessário existir um máximo ou um mínimo em c. Além disso, podemos ter um valor extremo $f(c)$, sem que exista $f'(c)$.*

Exemplo 4.43 *Para $f(x) = x^3$ temos $f'(0) = 0$, no entanto $f(0)$ não é mínimo nem máximo de f.*

Exemplo 4.44 *Para $f(x) = |x|$ temos $f(0) = 0$ como mínimo absoluto de f, no entanto $\nexists\, f'(0)$.*

Observação 4.7 *O Teorema de Fermat sugere que ao procurarmos os valores mínimos e máximos de uma função f iniciemos procurando os valores c tais que $f'(c) = 0$. Esses números são chamados de* **números críticos***.*

Definição 4.9 *Um* ***número crítico*** *de uma função f é um número c no domínio de f tal que $f'(c) = 0$ ou $\nexists\, f'(c)$.*

Procedimento para encontrar um máximo ou mínimo absoluto de uma função contínua em um intervalo fechado:

1º) Encontre os valores de f nos números críticos.

2º) Determine os valores de f nos extremos do intervalo.

3º) O maior valor das etapas anteriores é o máximo absoluto, ao passo que o menor desses valores é o mínimo absoluto.

Exemplo 4.45 *Encontre os valores absolutos da função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, $-\dfrac{1}{2} \leq x \leq 4$.*

4.12 Problemas de Otimização

Os métodos estudados nesta seção para encontrar os valores extremos têm aplicações práticas em muitas situações do dia a dia. A seguir vamos resolver problemas tais como maximizar áreas, volumes e lucros e minimizar distâncias, tempo e custos.

Exemplo 4.46 *Um fabricante de caixas de papelão deseja fazer caixas abertas a partir de pedaços quadrados de papelão com* $144\,cm^2$ *cortando quadrados iguais nos quatro cantos e dobrando os lados para cima. Queremos encontrar o comprimento do lado do quadrado a ser cortado para obter uma caixa com o maior volume possível.*

Exemplo 4.47 *Um campo retangular à margem de um rio deve ser cercado, com exceção do lado ao longo do rio. Se no lado paralelo ao rio será usado um material de* $R\$12,00$ *por metro linear e, nas laterais um material de* $R\$8,00$ *por metro linear, ache o campo de maior área possível que possa ser cercado com* $R\$3.600,00$ *de material.*

Exemplo 4.48 *Uma exposição de tubarões será feita numa tenda que tem o formato de um cone circular reto com $5\,m$ de raio e $4\,m$ de altura. Os engenheiros responsáveis pela construção da tenda, deverão encontrar as dimensões de um cilindro circular reto de maior volume que possa ser colocado dentro da tenda (cilindro inscrito no cone) para abrigar os tubarões.*

4.13 Esboço de gráficos: O Teste da 1ª e 2ª derivada

O Teorema do Valor Médio

Teorema 4.18 ***(O Teorema de Rolle)*** *Seja f uma função que satisfaz as seguintes hipóteses:*

1. *f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$.*
2. *f é derivável no intervalo aberto (a, b).*
3. *$f(a) = f(b)$*

Então existe um número c em (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

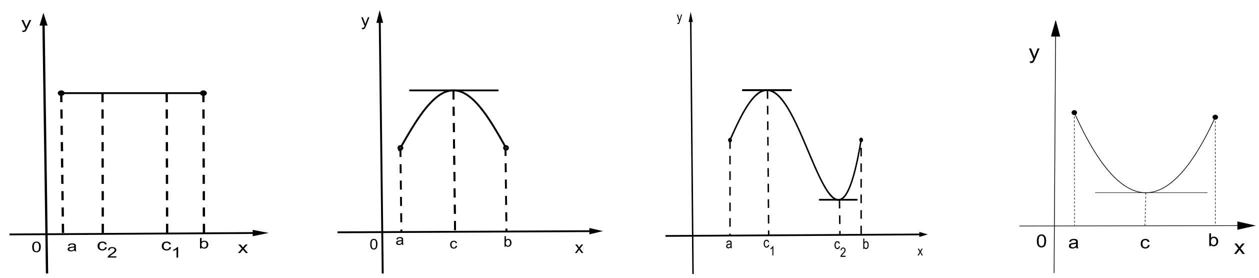


Figura 4.4:

.

Prova: Existem três casos:

Caso I: $f(x) = k$, uma constante.

Então $f'(x) = 0$, logo o número c pode ser tomado com qualquer número em (a, b).

Caso II: $f(x) > f(a)$ para algum x em (a, b) (figura (b) ou (c)). Pelo Teorema do Valor Extremo (hipótese 1), f tem um valor máximo em algum ponto de $[a, b]$. Uma vez que $f(a) = f(b)$, ela deve assumir esse valor máximo em algum número c no intervalo aberto (a, b). Então f tem um máximo local em c e , pela hipótese 2, f é derivável em c. Portanto, $f'(c) = 0$ pelo Teorema de Fermat.

Caso III: $f(x) < f(a)$ para algum x em (a, b) (figura (c) ou (d)). Pelo Teorema do Valor Extremo (hipótese 1), f tem um valor mínino em $[a, b]$ e como $f(a) = f(b)$, ela deve assumir esse valor mínimo em algum número c no intervalo aberto (a, b). Então f tem um mínimo local em c e , analogamente ao *caso II*, $f'(c) = 0$.

Teorema 4.19 ***(O Teorema do Valor Médio)*** *Seja f uma função é contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b). Então existe um número c em (a, b) tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ ou } f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

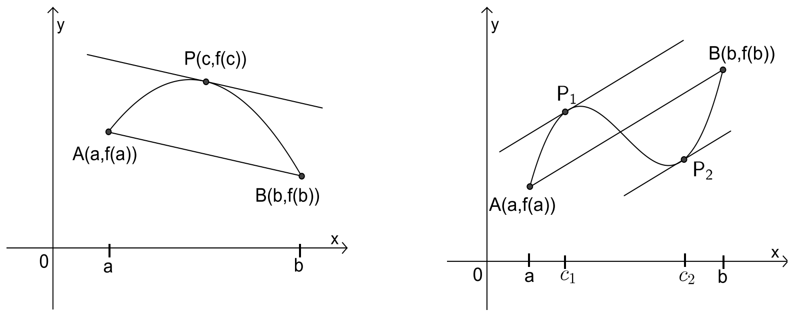


Figura 4.5:

Exemplo 4.49 *Para ilustrar o Teorema do Valor Médio com uma função específica, vamos considerar $f(x) = x^3 - x, a = 0, b = 2$. Uma vez que f é um polinômio, então ela é contínua e derivável para todo x; logo, é certamente contínua em $[0, 2]$ e derivável em $(0, 2)$. Portanto, pelo Teorema do Valor Médio, existe um número c em $(0, 2)$ tal que*

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0) \Rightarrow 6 = (3c^2 - 1).2 = 6c^2 - 2$$

o que nos dá $c^2 = \frac{4}{3}$, isto é, $c = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$. Porém c deve estar em $(0, 2)$; logo, $c = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

A figura abaixo ilustra esse cálculo: a reta tangente no ponto $(c, f(c))$ é paralela à reta secante OB.

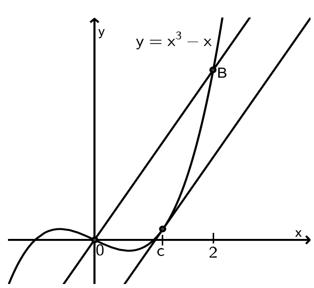


Figura 4.6:

Teorema 4.20 *Se $f'(x) = 0$ para todo x em um intervalo (a, b), então f é constante em (a, b).*

Corolário (Consequência do Teorema 4.20): Se $f'(x) = g'(x)$ para todo x em um intervalo (a, b), então $f - g$ é constante em (a, b); isto é, $f(x) = g(x) + c$, c constante real.

O teste da primeira derivada

Muitas das aplicações do cálculo dependem de nossa habilidade para deduzir fatos sobre uma função f a partir de informações relativas a suas derivadas. Como $f'(x)$ representa a inclinação da curva $y = f(x)$ no ponto $(x, f(x))$, ela nos informa para qual direção a curva segue em cada ponto. Assim, é razoável esperar que informações sobre $f'(x)$ nos dê informações sobre $f(x)$.

O QUE f′ NOS DIZ SOBRE f?

Para estudarmos como a derivada de f pode nos indicar o comportamento de f, vamos primeiro definir as funções crescentes e decrescentes.

Definição 4.10 *Uma função f definida num intervalo I será **crescente** naquele intervalo, se e somente se*

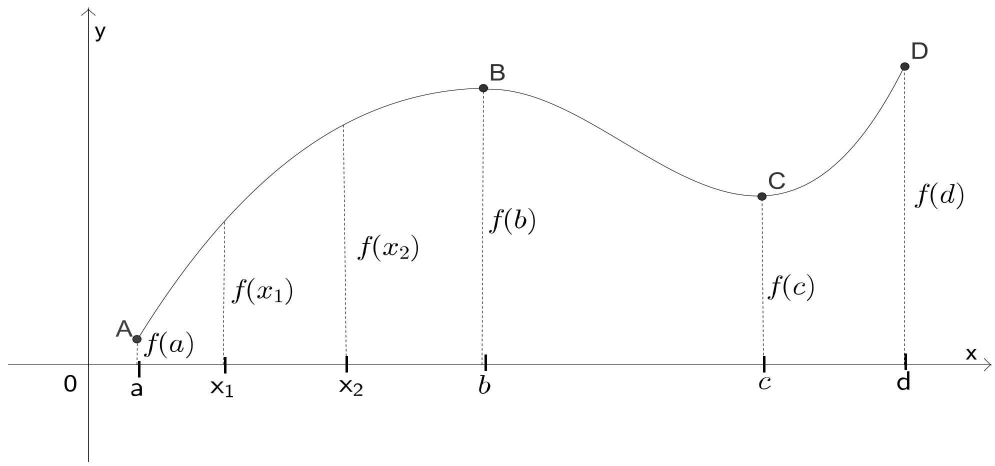
$$f(x_1) < f(x_2) \text{ sempre que } x_1 < x_2.$$

onde x_1 e x_2 são números quaisquer no intervalo I.

Definição 4.11 *Uma função f definida num intervalo I será **decrescente** naquele intervalo, se e somente se*

$$f(x_1) > f(x_2) \text{ sempre que } x_1 < x_2.$$

onde x_1 e x_2 são números quaisquer no intervalo I.



Observe que entre A e B e entre C e D as retas tangentes têm inclinação positiva, logo $f'(x) > 0$. Entre B e C, as retas tangentes têm inclinação negativa, portanto, $f'(x) < 0$. Assim, parece que f cresce quando $f'(x)$ é positiva e decresce quando $f'(x)$ é negativa. Para demonstrar que isso é sempre válido, vamos usar o Teorema do Valor Médio.

Teorema 4.21 ***TESTE CRESCENTE/DECRESCENTE OU TESTE C/D***

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b):

(i) se $f'(x) > 0$ para todo x em (a, b), então f será crescente em $[a, b]$;

(ii) se $f'(x) < 0$ para todo x em (a, b), então f será decrescente em $[a, b]$.

Demonstração:

(a) Sejam x_1 e x_2 dois números quaisquer no intervalo (a, b) com $x_1 < x_2$. De acordo com a definição de uma função crescente, temos de mostrar que $f(x_1) < f(x_2)$.

Como nos foi dado que $f'(x) > 0$, sabemos que f é derivável em $[x_1, x_2]$. Logo, pelo Teorema do Valor Médio, existe um número c entre x_1 e x_2 tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Como, $f'(c) > 0$ e $x_2 - x_1 > 0$ temos: $f(x_2) - f(x_1) > 0$ ou seja, $f(x_1) < f(x_2)$.

Isso mostra que f é crescente.

A parte(b) é demonstrada de maneira semelhante.

Exemplo 4.50 *Encontre os intervalos onde a função* $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ *é crescente e onde ela é decrescente.*

Teste da Derivada Primeira

Seja f uma função contínua em todos os pontos do intervalo aberto (a, b) contendo o número c e suponha que f' exista em todos os pontos de (a, b), exceto possivelmente em c.

(a) Se o sinal de f' mudar de positivo para negativo em c, ou seja,

$$\begin{cases} f'(x) > 0, & \text{se } \ a < x < c \quad \text{e} \\ f'(x) < 0, & \text{se } \ c < x < b \end{cases}$$

então f tem um **máximo local** em c.

(b) Se o sinal de f' mudar de negativo para positivo em c, ou seja,

$$\begin{cases} f'(x) < 0, & \text{se } \ a < x < c \quad \text{e} \\ f'(x) > 0, & \text{se } \ c < x < b \end{cases}$$

então f tem um **mínimo local** em c.

Resumidamente, para determinar os extremos relativos de f devemos proceder da seguinte maneira:

1- Encontrar $f'(x)$;

2- Encontrar os números críticos de f;

3- Aplicar o Teste da Derivada Primeira nos números críticos de f.

Nos exemplos a seguir ache os extremos relativos de f, aplicando o procedimento acima. Determine os valores de x nos quais ocorrem extremos relativos, bem como os intervalos nos quais f é crescente e aqueles onde f é decrescente. Faça um esboço do gráfico.

Exemplo 4.51 *Esboce o gráfico da função* $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

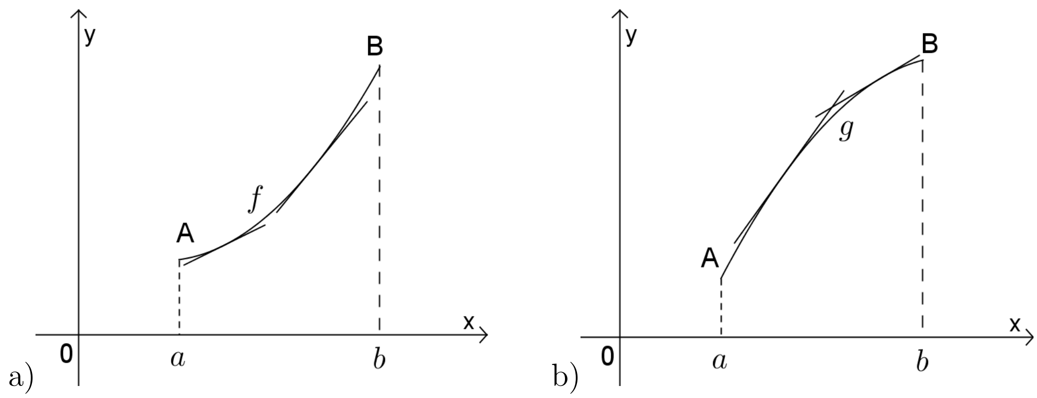
Exemplo 4.52 *Esboce o gráfico da função* $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & se\ \ x < 3 \\ 8 - x, & se\ \ 3 \leq x \end{cases}$

Exemplo 4.53 *Esboce o gráfico da função* $f(x) = x^{\frac{4}{3}} + 4x^{\frac{1}{3}}$

Exemplo 4.54 *Esboce o gráfico da função* $f(x) = x + 2sen\,x,\ 0 \leq x \leq 2\pi$

O teste da segunda derivada

A figura abaixo mostra os gráficos de duas funções crescentes em (a, b). Ambos os gráficos unem A ao B, mas eles são diferentes, pois inclinam-se em direções diferentes. Como distinguir entre esses dois tipos de comportamento? Observando as tangentes a essas curvas traçadas em vários pontos, podemos notar que: na parte (a) a curva fica acima das tangentes e f é chamada *côncava para cima* em (a, b). Em (b) a curva fica abaixo das tangentes e g é denominada *côncava para baixo* em (a, b).



O QUE f″ NOS DIZ SOBRE f?

Para estudarmos como a derivada segunda de f pode nos indicar o comportamento de f, vamos primeiro definir as funções com gráfico côncavo para cima ou com gráfico côncavo para baixo.

Definição 4.12 *O gráfico de uma função f é dito* ***côncavo para cima*** *no ponto $(c, f(c))$ se $f'(c)$ existir e se houver um intervalo I contendo c, tal que para todos os valores de $x \neq c$ em I, o ponto $(x, f(x))$ do gráfico está acima da reta tangente ao gráfico em $(c, f(c))$.*

Analogamente, dizemos que o gráfico de uma função f é ***côncavo para baixo*** *no ponto $(c, f(c))$ se $f'(c)$ existir e se houver um intervalo I contendo c, tal que para todos os valores de $x \neq c$ em I, o ponto $(x, f(x))$ do gráfico está abaixo da reta tangente ao gráfico em $(c, f(c))$.*

Definição 4.13 *Se o gráfico de uma função f estiver acima de todas as suas tangentes no intervalo I, então ele é dito* ***côncavo para cima*** *no intervalo I. Se o gráfico de f estiver abaixo de todas as sua tangentes em I, é* ***côncavo para baixo****.*

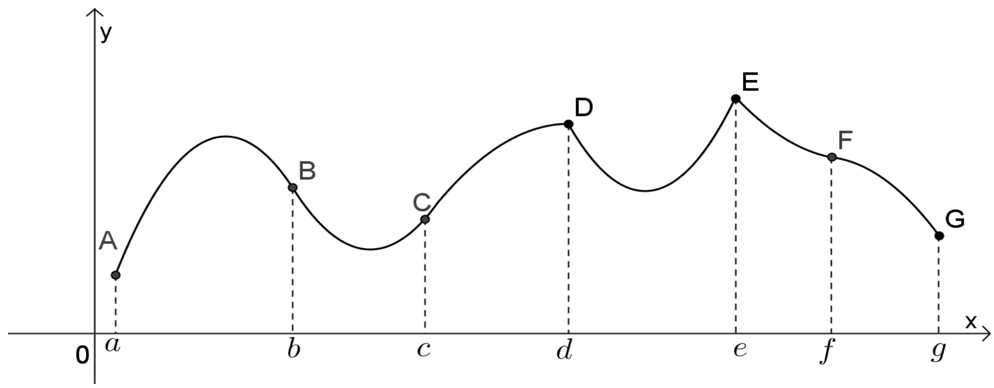


Figura 4.7:

.

Vamos analisar agora como a derivada segunda nos ajuda a determinar os intervalos de concavidade

Teorema 4.22 *Seja f uma função diferenciável em algum intervalo aberto contendo c. Então,*

(i) Se $f''(c) > 0$ então o gráfico de f é côncavo para cima em $(c, f(c))$;

(ii) Se $f''(c) < 0$ então o gráfico de f é côncavo para baixo em $(c, f(c))$.

Definição 4.14 *O ponto $P(c, f(c))$ será um* ***ponto de inflexão*** *do gráfico de f se o gráfico tiver nele uma reta tangente e se existir um intervalo aberto I contendo c, tal que se x estiver em I, então*

- *$f''(x) < 0$ se $x < c$ e $f''(x) > 0$ se $x > c$ ou*
- *$f''(x) > 0$ se $x < c$ e $f''(x) < 0$ se $x > c$.*

Teorema 4.23 *Seja a função f for derivável em algum intervalo aberto contendo c e se $(c, f(c))$ for um ponto de inflexão do gráfico de f, então, se $f''(c)$ existe, $f''(c) = 0$.*

Teste da Derivada Segunda

Seja c um número crítico de uma função f, no qual $f'(c) = 0$ e suponhamos que $f'(x)$ exista para todo x em algum intervalo aberto contendo c. Se $f''(c)$ existe e

(a) se $f''(c) > 0$ então f tem um **mínimo local** em c.

(b) se $f''(c) < 0$ então f tem um **máximo local** em c.

Exemplo 4.55 *Examine a curva* $f(x) = x^4 - 4x^3$ *em relação à concavidade, aos pontos de inflexão e mínimos e máximos locais. Esboce a curva.*

Exemplo 4.56 *Faça um esboço do gráfico de* $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$.

Teorema 4.24 ***(Teorema de Cauchy: Generalização do Teorema do Valor Médio)***

Se as funções f e g são contínuas em $[a,b]$ e deriváveis em (a,b), sendo $g'(x) \neq 0$ para todo x em (a,b). Então existe um número c em (a,b) tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Regra de L'Hôspital Se f e g são deriváveis e $g'(x) \neq 0$ em um intervalo aberto I que contém a (exceto possivelmente em a.) E se

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

ou

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$$

(Em outras palavras, temos uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Então

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

se o limite do lado direito existir (ou for $+\infty$ ou $-\infty$)

Exemplo 4.57 *Utilize a Regra de L'Hôspital para calcular:*

1- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{ln\, x}{x-1}$ *2-* $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$

3- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen\, x}{x}$ *4-* $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{ln\, x}{\sqrt[3]{x}}$

5-$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{ln(x+1)}$

Lista de Exercícios - O Teste da 1ª e 2ª Derivada: Esboço de Gráficos

Nos exercícios 1 a 10:

a) Encontre os intervalos nos quais f é crescente ou decrescente.

b) Encontre os valores máximo e mínimo local de f.

c) Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão.

d) Faça um esboço do gráfico de f.(Sugestão: Use o software GeoGebra para comparar com seu esboço.)

1 − $f(x) = x^3 - 12x + 1$

2 − $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

3 − $f(x) = sen\,x + cos\,x,\ 0 \leq\ x\ \leq\ 2\pi$

4 − $f(x) = e^{2x} + e^{-x}$

5 − $f(x) = \dfrac{ln(x)}{\sqrt{x}}$

6 − $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

7 − $f(x) = 2 + 2x^2 - x^4$

8 − $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 3$

9 − $f(x) = x\sqrt{x+3}$

10 − $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(x+4)$

ROTEIRO PARA ESBOÇAR UMA CURVA:

1º) Determine o **domínio**.

2º) Determine as **interseções com os Eixos** (você pode omitir esta etapa se a equação f(x)=0 for difícil de resolver).

3º) Verifique se há **simetria**: se $f(x) = f(-x)$ o trabalho é reduzido a metade; se $f(x) = -f(-x)$ a curva será simétrica com relação a origem; se $f(x+p) = f(x)$ para todo x no domínio de f, sendo p constante positiva, então f é periódica, se souber como é o gráfico em um intervalo de comprimento p, então poderá usar translação para esboçar o grafico inteiro.

4º) Verifique se f possui **assíntotas** verticais e/ou horizontais.

5º) Estude os **intervalos de crescimento e decrescimento** usanto o teste C/D.

6º) Estude os **máximos e mínimos locais**, calculando os pontos críticos e aplicando o Teste da derivada primeira ou o Teste da derivada segunda.

7º)Estude a concavidade e os pontos de inflexão.

8º) Usando as informações obtidas do 1º) ao 7º) passo faça o gráfico. Coloque as assíntotas como linhas tracejadas. Marque as interseções com os eixos, os pontos de máximo e mínimo e os pontos de inflexão. Então, faça a curva passar por esses pontos, subindo ou descendo de acordo com 5º), com a concavidade de acordo com 7º) e tendendo as assíntotas.

Exercícios - Capítulo 4

Exercício 4.1 *Determine o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f em $P(a, f(a))$ e a equação da reta tangente em $P_1(2, f(2))$. Faça um esboço da gráfico de cada função.*

a) $f(x) = 5x^2 - 4x$ b) $f(x) = x^3$ c) $f(x) = 3x + 2$

Exercício 4.2 *Calcule, usando a definição, a derivada das seguintes funções:*

a) $f(x) = -5x^2 + 8x + 2$ b) $f(x) = x^3 + x$ c) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 7x + \sqrt{3}$

Exercício 4.3 *Calcule a derivada das seguintes funções.*

1) $f(x) = 7x - 5$ 2)$f(x) = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2$ 3) $g(x) = \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x^4}$

4) $g(x) = 8 - 3x$ 5) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 2$ 6) $H(x) = \frac{5}{6x^5}$

7) $f(x) = 1 - 2x - x^2$ 8) $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ 9) $f(s) = \sqrt{3}(s^3 - s^2)$

10) $f(x) = 4x^2 + x + 1$ 11) $f(y) = y^{10} + 7y^5 - y^3 + 1$ 12) $f(x) = (2x^2 + 5)(4x - 1)$

13) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 2$ 14) $F(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ 15) $f(x) = (2x^4 - 1)(5x^3 + 6x)$

16)$f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 1$ 17) $f(x) = \frac{x^3}{3} + 3x^2$ 18) $f(x) = (4x^2 + 3)^2$

19) $f(x) = \frac{1}{8}x^8 - x^4$ 20) $f(x) = 4x^4 - \frac{1}{x^4}$ 21) $f(y) = (7 - 3y^3)^2$

22) $f(x) = x^7 - 2x^5 + 5x^3$ 23) $f(x) = x^4 + x^{-4}$ 24) $f(t) = (t^3 - 2t)(2t^2 + t)$

25) $f(x) = tg\, x . sec\, x$ 26) $f(x) = 3\, sen\, x$ 27) $f(x) = sen\, x\, +\, cos\, x$

28) $g(x) =\, tg\, x\, +\, cotg\, x$ 29) $f(x) = 4\, sec\, x\, - 2\, cosec\, x$ 30)$f(t) = 2t\, cos\, t$

31) $f(x) = 4x^2\, cos\, x$ 32)$g(x) = x\, sen\, x\, + cos\, x$ 33) $g(y) = 3\, sen\, y\, - y\, cos\, y$

34) $h(x) = 4\, sen\, x\, .\, cos\, x$ 35) $f(x) =\, x^2\, sen\, x + 2x\, cos\, x$

36) $f(x) = x^2\, cos\, x - 2x\, sen\, x - 2cos\, x$ 37) $h(y) = y^3\, -\, y\, cos\, y\, + 2y\, sen\, y\, + 2\, cos\, y$

38) $f(x) = 3\, cossec\, x.cotg\, x$ 39) $f(t) =\, (sen\, t)(tg\, t)$

Exercício 4.4 *Nos exercícios de 40 a 61 calcule a derivada indicada.*

40) $D_x\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ 41) $D_x\left(\dfrac{2x}{x+3}\right)$ 42) $D_x\left(\dfrac{x}{x^2-1}\right)$

43) $D_y\left(\dfrac{2y+1}{3y+4}\right)$ 44) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}\right)$ 45) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{4-3x-x^2}{x-2}\right)$

46) $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{5t}{1+2t^2}\right)$ 47) $\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{s^2-a^2}{s^2+a^2}\right)$ 48) $D_y\,(cotg\,y\,cosec\,y)$

49) $D_x\,(cos\,x\,cotg\,x)$ 50) $D_z\left(\dfrac{2\,cos\,z}{z\,+\,1}\right)$ 51) $D_t\left(\dfrac{sen\,t}{t}\right)$

52) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{sen\,x}{1-cos\,x}\right)$ 53) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x+4}{cos\,x}\right)$ 54) $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{tg\,t}{cos\,t\,-\,4}\right)$

55) $\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{cotg\,y}{1-sen\,y}\right)$ 56) $\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{1\,+\,sen\,y}{1\,-\,sen\,y}\right)$ 57) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{sen\,x\,-\,1}{cos\,x\,+\,1}\right)$

58) $\dfrac{d}{dx}\left[(x-senx)(x+cosx)\right]$ 59) $\dfrac{d}{dz}\left[(z^2+cosz)(2z-senz)\right]$

60) $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{2cosec\,t\,-\,1}{cosec\,t\,+\,2}\right)$ 61) $\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{tg\,y\,+\,1}{tg\,y\,-\,1}\right)$

Exercício 4.5 *Nos Exercícios de 62 a 73, calcule $f'(a)$ para o valor indicado.*

62) $f(x)=xcos\,x;\ a=0$ 63) $f(x)=x\,sen\,x;\ a=\frac{3}{2}\pi$

64) $f(x)=\dfrac{cos\,x}{x};a=\dfrac{1}{2}\pi$ 65) $f(x)=\dfrac{sec\,x}{x^2};a=\pi$

66) $f(x)=x^2\,tg\,x;\ a=\pi$ 67) $f(x)=x^2\,cos\,x\,-\,sen\,x;\ a=0$

68) $f(x)=sen\,x(cos\,x\,-\,1);\ a=\pi$ 69) $f(x)=(cos\,x\,+\,1)(x\,sen\,x\,-\,1);\ a=\frac{1}{2}\pi$

70) $f(x)=x\,cos\,x\,+\,x\,sen\,x;\ a=\frac{1}{4}\pi$ 71) $f(x)=tg\,x\,+\,sec\,x;\ a=\frac{1}{6}\pi$

72) $f(x)=2\,cotg\,x\,-\,cosec\,x;\ a=\frac{2}{3}\pi$ 73) $f(x)=\dfrac{1}{cotg\,x\,-\,1};\ a=\dfrac{3}{4}\pi$

Exercício 4.6 *Determine uma equação da reta tangente à curva* $y = x^3 - 4$ *no ponto* $(2, 4)$.

Exercício 4.7 *Determine uma equação da reta tangente à curva* $y = 8/(x^2 + 4)$ *no ponto* $(2, 1)$.

Exercício 4.8 *Calcule* $f'(x)$*, sendo:*

a) $f(x) = e^{3x}$	b) $f(x) = \sqrt{e^x}$	c) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$	d) $f(x) = 3.2^x$
e) $f(x) = \left(\frac{2}{e}\right)^x$	f) $f(x) = sen\, e^{2x}$	g) $f(x) = tg\,(\pi^x)$	h) $f(x) = ln(3x)$
i) $f(x) = ln(\sqrt{x})$	j) $f(x) = sen\,(ln(x))$	k) $f(x) = ln(cos\, x)$	l) $f(x) = tg(tg\, x)$
m) $f(x) = log_3(3x)$	n) $f(x) = log_\pi 2x$	o) $f(x) = sen(log_2(3x))$	p) $f(x) = cos(log_5 \sqrt{x})$

Exercício 4.9 *Calcule a derivada.*

a) $f(x) = (x^2 - 3x + 8)^3$	b) $g(x) = (8x - 7)^{-5}$	c) $f(x) = \dfrac{x}{(x^2 - 1)^4}$
d) $f(x) = (8x^3 - 2x^2 + x - 7)^5$	e) $N(x) = (6x - 7)^3(8x^2 + 9)^2$	f) $g(w) = \dfrac{w^2 - 4w + 3}{w^{3/2}}$
g) $H(x) = \dfrac{2x + 3}{\sqrt{4x^2 + 9}}$	h) $H(\theta) = \cos^5 3\theta$	i) $f(x) = \cos(3x^2) + \cos^2(3x)$
j) $h(w) = \dfrac{\cos 4w}{1 - sen4w}$	k) $g(z) = \left(z^2 - \dfrac{1}{z^2}\right)^6$	l) $k(r) = \sqrt[3]{8r^3 + 27}$

Exercício 4.10 *Calcule a primeira e a segunda derivadas*

a) $k(r) = (4r + 7)^5$ *b)* $f(x) = sen^3 x$

Exercício 4.11 *Se* $k(x) = f(g(x))$ *e se* $f(2) = -4$, $g(2) = 2$, $f'(2) = 3$ *e* $g'(2) = 5$, *determine* $k(2)$ *e* $k'(2)$.

Exercício 4.12 *Se* $f(t) = g(h(t))$ *e se* $f(4) = 3$, $g(4) = 3$, $h(4) = 4$, $f'(4) = 2$ *e* $g'(4) = -5$, *calcule* $h'(4)$.

Exercício 4.13 *De um balão a 150 metros acima do solo, deixa-se cair um saco de areia. Desprezando-se a resistência do ar, a distância* $s(t)$ *do solo ao saco de areia em queda, após*

t segundos, é dada por

$$s(t) = -4,9t^2 + 150$$

Determinar a velocidade do saco de areia

a) quando $t = a$ segundos;

b) quando $t = 2$ segundos;

c) no instante em que ele toca o solo.

Exercício 4.14 *Uma bola de bilhar é atingida e movimenta-se em linha reta. Se s em cm for a distância da bola de sua posição inicial após t segundos, então, $s(t) = 100t^2 + 100t$. Com qual velocidade a bola atingirá a tabela da posição inicial que está a 39 cm?*

Exercício 4.15 *Em um circuito elétrico, se E volts for a força eletromotriz, R ohms for a resistência e I ampères for a corrente, segue da lei de Ohm que $IR = E$. Supondo que E seja uma constante positiva, mostre que R diminui a uma taxa proporcional ao inverso do quadrado de I.*

Exercício 4.16 *Suponha que um tumor no corpo de uma pessoa tenha a forma esférica. Se, quando o raio do tumor for $0,5cm$, o raio estiver crescendo a uma taxa de $0,001cm$ por dia, qual será a taxa de aumento do volume do tumor naquele instante? E qual será a taxa de crescimento da sua área?*

Exercício 4.17 *Uma pedra cai livremente num lago parado. Ondas circulares se espalham e o raio da região afetada aumenta a uma taxa de $16cm/s$. Qual a taxa segundo a qual a região está aumentando quando o raio for de $4cm$?*

Exercício 4.18 *Um tanque tem a forma de um cone invertido com $16m$ de altura e uma base com $4m$ de raio. A água "flui"no tanque a uma taxa de $2m^3/min$. Com que velocidade o nível da água estará se elevando quando sua profundidade for de $5m$?*

Exercício 4.19 *Dada $x \cos y = 5$, onde x e y são funções de uma terceira variável t. Se $\frac{dx}{dt} = -4$, ache $\frac{dy}{dt}$ quando $y = \frac{1}{3}\pi$.*

Exercício 4.20 *Estima-se que, daqui a* t *anos, a circulação de um jornal local será* $C(t) = 100t^2 + 400t + 5000$. *Calcule o aumento sofrido pela circulação daqui a* 6 *meses.*

Exercício 4.21 *Estima-se que, daqui a* t *anos, a população de uma certa comunidade suburbana será de* $P(t) = 20 - \dfrac{6}{t+1}$ *milhares de habitantes. Qual será o aumento aproximado da população durante os próximos* 3 *meses?*

Exercício 4.22 *Um estudo da eficiência do turno da manhã de uma certa fábrica indica que um operário médio, chegando ao trabalho às 8 horas, montará* $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 15x$ *rádios* x *horas depois. Quantos rádios o operário montará aproximadamente, entre 9 horas e 9 horas e 15 minutos?*

Exercício 4.23 *Numa certa fábrica, a produção diária é de* $Q(k) = 600\sqrt{k}$ *unidades, onde* k *representa o investimento de capital medido em unidades de* $R\$1.000,00$. *O investimento atual de capital é de* $R\$900.000,00$. *Estime o efeito resultante na produção diária com um investimento de capital adicional de* $R\$800,00$.

Exercício 4.24 *Em certa fábrica, a produção diária é de* $Q(L) = 60.000L^{\frac{1}{3}}$ *unidades, sendo* L *o número de operários-hora. Atualmente, trabalham* 1000 *operários-hora na fábrica, diariamente. Estime o efeito resultante na produção, quando apenas* 940 *operários-hora estiverem trabalhando.*

Exercício 4.25 *Você mediu o raio de uma esfera, encontrando* $6cm$, *e usou a fórmula* $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ *para calcular o volume. Se a medida do raio tiver uma porcentagem de erro máxima de* 1%, *aproximadamente, qual será a porcentagem de erro máxima do volume que você calculou?*

Exercício 4.26 *Estime o que acontecerá à área de uma região circular, se o raio aumentar de* 1%.

Exercício 4.27 *Um tanque cilíndrico aberto, deve ter um revestimento externo com 2cm de espessura. Se o raio interno for 6m e a altura 10 m, encontre, por diferenciais, a quantidade de material necessária para o revestimento.*

Exercício 4.28 *Um pintor é contratado para pintar ambos os lados de 50 placas quadradas com 40 cm de lado. Depois que recebeu as placas verificou que os lados das placas tinham* $\frac{1}{2}$ *cm a mais. Usando diferencial, determine o aumento aproximado da porcentagem de tinta a ser usada.*

Capítulo 5

Integrais

Um engenheiro pode usar informações quanto a taxa de variação segundo a qual a água está escoando de um tanque para determinar a quantidade escoada durante um certo período. Da mesma maneira um físico conhecendo a velocidade ou a aceleração de uma partícula pode determinar sua posição em um dado instante.

Em cada caso, o objetivo é encontrar uma função F cuja derivada é uma função conhecida f. Se a função F existir então ela é chamada de ***antiderivada*** de f.

5.1 Antidiferenciação

Você já está familiarizado com ***operações inversas: adição e subtração, multiplicação e divisão, potenciação e radiciação.*** Nesta seção, vamos desenvolver a operação inversa da diferenciação chamada de ***antidiferenciação***.

$$F'(x) = f(x) \underset{\text{antidiferenciação}}{\Longrightarrow} F(x)$$

Definição 5.1 *Uma função F será chamada de antiderivada (ou integral indefinida) de uma função f num intervalo I se $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.*

Notação: Usa-se o símbolo $\displaystyle\int$ para denotar a operação de antidiferenciação.

Antidiferenciação é o processo de encontrar o conjunto de todas as antiderivadas de uma dada função.

Exemplo 5.1 *$F(x) = x^3$ é uma antiderivada de $f(x) = 3x^2$ pois*

$$F'(x) = D_x(x^3) = f(x),$$

onde $D_x(x^3)$ é a derivada de x^3 em relação a x.

Há muitas outras antiderivadas de $3x^2$, tais como, $x^3 - 1$, $x^3 + \sqrt{2}$ e $x^3 + 5$. De modo geral, se C é umas constante arbitrária, então $x^3 + C$ é antiderivada de $3x^2$, pois

$$D_x(x^3 + C) = 3x^2 + 0 = 3x^2.$$

Assim, existe uma família de antiderivadas de $3x^2$ da forma $F(x) = x^3 + C$, onde C é uma constante qualquer. O próximo teorema afirma que toda antiderivada é desta forma.

Teorema 5.1 *Seja F uma antiderivada de f em um intervalo I. Se G é uma outra antiderivada de f em I, então*

$$G(x) = F(x) + C$$

para alguma constante C e todo x em I.

Observação 5.1 *Usando a definição de* ***diferencial*** *temos:*

$$d(F(x)) = F'(x)\,dx \underset{F'(x)=f(x)}{\Longrightarrow} d(F(x)) = f(x)dx$$

Aplicando a ***antidiferenciação,*** *temos:*

$$\int d(F(x)) = F(x) + C$$

Notação: $\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C$ se, $F'(x) = f(x)$.

Como a antidiferenciação é a operação inversa da diferenciação, os teoremas sobre antidiferenciação podem ser obtidos dos teoremas sobre diferenciação.

Teorema 5.2

i) $\displaystyle\int [D_x f(x)]dx = f(x) + C$

ii) $\displaystyle D_x \left[\int f(x)dx\right] = f(x)$

Demonstração:

i) Verdadeira pois, $f'(x) = D_x f(x)$.

ii) $\displaystyle D_x \left[\int f(x)dx\right] = D_x \left[F(x) + C\right] = F'(x) + 0 = f(x)$, onde $F(x)$ é a antiderivada de $f(x)$.

Teorema 5.3 $\displaystyle\int dx = x + C$

Teorema 5.4 $\displaystyle\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$, *onde c é constante real.*

Teorema 5.5 *Se f_1 e f_2 estão definidas no mesmo intervalo, então*

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \ + \int f_2(x)dx$$

Teorema 5.6 *Se $f_1, f_2, ..., f_n$ estão definidas no mesmo intervalo,*

$$\int [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + ... + c_n f_n(x)]dx = c_1 \int f_1(x)dx \ + \ c_2 \int f_2(x)dx + ... + c_n \int f_n(x)dx$$

onde $c_1, c_2, ..., c_n$ são constantes.

Teorema 5.7 *Se n for um número racional*

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1 \text{ e } C \text{ uma constante qualquer.}$$

Demonstração: $D_x\left[\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right] = (n+1)\frac{x^n}{n+1} + 0 = x^n.$

Observação 5.2 *Para $n{=}{-}1$ temos $\displaystyle\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = ln|x|{+}C$, $\quad C$ uma constante qualquer.*

Exemplo 5.2 *Calcule $\displaystyle\int (x^5 + 3x - 1)dx$.*

Solução:

$$\begin{aligned}
\int (x^5 + 3x - 1)dx &= \int x^5 dx + \int 3x dx - \int dx \\
&= \int x^5 dx + 3\int x dx - \int dx \\
&= \frac{x^6}{6} + C_1 + 3\frac{x^2}{2} + C_2 - x + C_3 \\
&= \frac{x^6}{6} + 3\frac{x^2}{2} - x + C
\end{aligned}$$

onde $C = C_1 + C_2 + C_3$.

Observação: Não é necessário a utilização de três constantes, pois a soma de constantes é uma constante, portanto podemos substituir a soma por uma única constante.

Exemplos:

1) $\displaystyle\int x^3\,dx =$

2) $\displaystyle\int x^2\,dx =$

3) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\,dx =$

4) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x}\,dx =$

5) $\displaystyle\int (3x+5)\,dx$

6) $\displaystyle\int (5x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 2x + 7)\,dx$

7) $\displaystyle\int \sqrt{x}\left(1 + \frac{1}{x}\right)\,dx$

8) $\displaystyle\int \frac{5t^2+7}{t^{\frac{4}{3}}}\,dt$

Os teoremas para a antiderivada das funções seno e cosseno seguem imediatamente dos teoremas correspondentes para diferenciação.

Teorema 5.8 $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

Teorema 5.9 $\int \; sen\, x\, dx = -cos\, x + C$

Teorema 5.10 $\int \; cos\, x\, dx = sen\, x + C$

Teorema 5.11 $\int \; sec^2\, x\, dx = tg\, x \; + \; C$

Teorema 5.12 $\int \; cossec^2\, x\, dx = -cotg\, x \; + \; C$

Teorema 5.13 $\int \; sec\, x.tg\, x\, dx = sec\, x \; + \; C$

Teorema 5.14 $\int \; cossec\; x.cotg\, x\, dx = -cossec\, x \; + \; C$

Exemplo 5.3 *Calcule* $\int (3sec\; x\; tg\; x\; - 5\, cossec^2\, x\,)dx$

Exemplo 5.4 *Calcule* $\int \frac{2cotgx - 3sen^2x}{senx}dx$

Exemplo 5.5 *Calcule* $\int (tg^2x + cotg^2x + 4)dx$

Antiderivada e taxas de variação

1. Estima-se que daqui a t meses a população de certa cidade esteja aumentando à taxa de $\frac{d}{dt}p(t) = 4 + 5t^{2/3}$ habitantes por mês. Se a população atual é de 10.000 habitantes, qual será a população daqui a 8 meses?

2. Um corpo está se movendo de tal forma que que sua velocidade após t minutos é

   $v(t) = 1 + 4t + 3t^2$ m/min. Que distância o corpo percorre no 3º minuto?

3. Um botânico descobre que certo tipo de árvore cresce de tal forma que sua altura $h(t)$, após t anos, está variando a uma taxa de $0,06t^{2/3} + 0,3t^{1/2}$ metros/ano. Se a árvore tinha 60 cm de altura quando foi plantada, qual altura estimada para daqui 27 anos?

5.1.1 Técnicas de Antidiferenciação: Regra da Cadeia e Mudança de Variável

Regra da cadeia para antidiferenciação

Observe que, para diferenciar $\frac{1}{10}(1+x^2)^{10}$ usamos a Regra da Cadeia e obtemos:

$$D_x\left[\frac{1}{10}(1+x^2)^{10}\right] = (1+x^2)^9(2x).$$

Suponha que desejamos antidiferenciar $(1+x^2)^9.(2x)$. Então, precisamos calcular:

$$\int (1+x^2)^9.(2x)dx = \int [g(x)]^9.[g'(x)dx] = \int u^9 du = \frac{1}{10}u^{10} + C = \frac{1}{10}(1+x^2)^{10} + C$$

A justificativa do procedimento usado para obter o resultado acima é dada pelo Teorema a seguir, que é análogo à regra da cadeia para diferenciação, sendo chamado de *regra da cadeia para antidiferenciação.*

Teorema 5.15 *Seja g uma função diferenciável e seja o intervalo I a imagem de g. Suponha que f seja uma função definida em I e que F seja uma antiderivada de f em I. Então,*

$$\int f(g(x))g'(x)\, dx = F(g(x)) + C$$

Se $u = g(x)$ e $du = g'(x)dx$, então

$$\int f(u)du = F(u) + C.$$

Exemplo 5.6 *Calcule:*

1) $\int \sqrt{3x+4}\, dx$

2) $\int x^2(5+2x^3)^8 dx$

3) $\int 3x^4(5+x^5)^3 dx$

4) $\int x.cos(x^2)dx$

5) $\int \dfrac{4x^2}{(1-8x^3)^4}\, dx$

6) $\displaystyle\int x^2\sqrt{1+x}\,dx$

7) $\displaystyle\int \frac{sen\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

8) $\displaystyle\int sen\,x\sqrt{1-cos\,x}\,dx$

9) $\displaystyle\int tg\,x\,dx$

5.2 A Integral Definida

Consideremos um interlavo $[a, b]$ e uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada com $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Em outras palavras, estamos supondo que para algum número real $k > 0$, temos

$$0 \leq f(x) \leq k \text{ para todo } x \in [a, b].$$

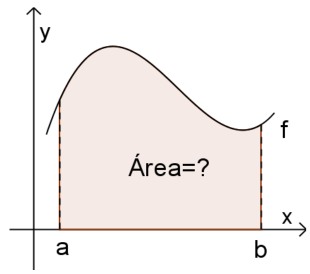


Figura 5.1:

A tentantiva de calcular a área da região entre as retas $x = a$ e $x = b$, situada entre o gráfico de f e o eixo das abscissas, leva-nos ao conceito de integral.

Um caminho natural para avaliar a área dessa região é iniciar com aproximações. Fazemos isso dividindo o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de mesmo comprimento $\Delta_n = \dfrac{b-a}{n}$, através dos pontos $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$.

Em cada um dos intervalos $[t_{i-1}, t_i]$ assim determinados, escolhemos um ponto c_i e construímos o retângulo com base $[t_{i-1}, t_i]$ e altura igual a $f(c_i)$. Parece natural esperar que a soma das áreas desses retângulos forneça uma aproximação da área desejada, e que quanto menor for o comprimento Δ_n de cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, tanto melhor será esta aproximação.

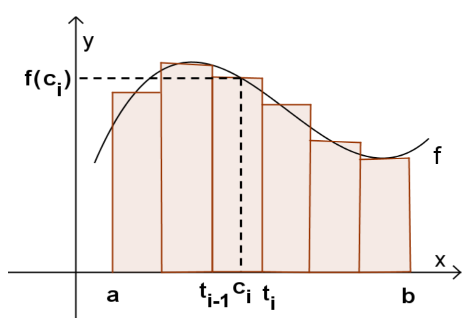


Figura 5.2:

.

Esta soma é

$$\begin{aligned} S_n(f) &= f(c_1)(t_1 - t_0) + f(c_2)(t_2 - t_1) + \ldots + f(c_n)(t_n - t_{n-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta_n. \end{aligned}$$

Quando existe $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(f)$, dizemos que a região acima descrita é mensurável e que sua área é

$$A = \lim_{n\to+\infty} S_n(f).$$

De acordo com a definição que daremos a seguir, este limite também será chamado de integral de f sobre $[a, b]$.

Observação 5.3 *É possível mostrar que este limite existe para um conjunto de funções.*

Integral definida de uma função

Dado um intervalo $[a, b]$ em $\mathbb{R}$, um subconjunto finito

$$P = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b\}$$

é chamado partição de $[a, b]$. Os intervalos $[t_{i-1}, t_i]$ são chamados *intervalos da partição* P ou, simplesmente, *intervalos* de P.

Consideremos uma função limitada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, isto é, uma função para qual existe um número $k > 0$ tal que $|f(x)| \leq k$ para todos $x \in [a, b]$. (Assim, f poderá também assumir valores negativos o que não permitíamos na seção anterior).

Para cada $n \in \mathbb{N}$, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n partes de mesmo comprimento $\Delta_n = \dfrac{b-a}{n}$ através da partição

$$P = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b\}.$$

Em cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ de P escolhemos um ponto c_i. Os pontos $c_1,\ c_2, \ldots,\ c_n$, constituem um pontilhamento de P. A soma

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(t_i - t_{i-1})$$

é chamada a ***soma de Riemann*** da função f relativamente à partição P.

Definição 5.2 *Quando existe* $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(f)$ *diremos que* f *é integrável e que sua integral é esse limite.*

Observe que existir
$$\lim_{n\to+\infty} S_n(f)$$
significa que esse limite deve ter o mesmo valor, qualquer que seja a escolha dos pontos $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$.

Para indicar a integral definida de f de a até b usaremos a notação
$$\int_a^b f(x)dx$$
Portanto,
$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f(x)dx} = \lim_{\mathbf{n}\to+\infty} \mathbf{S_n(f)} = \lim_{\mathbf{n}\to+\infty} \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{f(c_i)}\boldsymbol{\Delta}_\mathbf{n}.$$
Os números a e b são respectivamente *limite inferior* e *limite superior* da integral, a função $f(x)$ é o integrando e o símbolo $\int$ é um sinal de integração.

Quando o domínio de f contém um intervalo $[a, b]$, não sendo porém igual a este intervalo $[a, b]$, diremos integral de f sobre $[a, b]$.

Observação 5.4 *Fazer* n *tender a* ∞ *equivale a fazer* Δ_n *tender a zero.*

Observação 5.5 *Os intervalos* $[t_{i-1}, t_i]$ *de uma partição* P *não precisam ter o mesmo comprimento. Neste caso, porém, não basta exigir que* n *tenda ao infinito na definição da integral; precisamos exigir que o comprimento de cada intervalo de* P *tende a zero. Então teremos*
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P|\to 0} S_n(f),$$
onde $|P| = máx\{t_1 - t_0,\ t_2 - t_1, \dots,\ t_n - t_{n-1}\}$. *O número* $|P|$ *é chamado* ***norma da partição*** P.

Teorema 5.16 *Se uma função for contínua no intervalo fechado* $[a, b]$*, então ela será integrável em* $[a, b]$.

5.3 Propriedades da Integral Definida

1. $\int_a^b c dx = c(b-a)$, onde c é qualquer constante.

2. $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

3. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$, onde c é qualquer constante.

4. $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$.

5. Se $f(x) \geq 0$ para $a \leq x \leq b$, então $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

6. Se $f(x) \geq g(x)$ para $a \leq x \leq b$, então $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

7. Se $m \leq f(x) \leq M$ para $a \leq x \leq b$, então
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

8. Se f(a) existe, então $\int_a^a f(x)dx = 0$

9. Se $c > d$, então $\displaystyle\int_c^d f(x)dx = -\int_d^c f(x)dx$

Exemplo 5.7 *Usando o fato que* $\displaystyle\int_0^1 x^2dx = 1/3$. *Calcule* $\displaystyle\int_0^1 [4 + x^2]dx$.

Teorema 5.17 *Se $a < c < b$ e se f é integrável tanto em [a,c] como em [c,b], então f é integrável em [a,b] e*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

O resultado seguinte é uma generalização do Teorema 5.17 ao caso em que c não está necessariamente entre a e b.

Teorema 5.18 *Se f é integrável em um intervalo fechado e se a, b, c são números arbitrários no intervalo, então*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Exemplo 5.8 *Expresse como uma única integral* $\displaystyle\int_2^7 f(x)dx - \int_5^7 f(x)dx$.

5.4 O Teorema Fundamental do Cálculo(T.F.C)

O Teorema Fundamental do Cálculo estabelece uma conexão entre os dois ramos do cálculo: o cálculo diferencial e o cálculo integral.

O cálculo diferencial surgiu do problema da tangente, enquanto o cálculo integral surgiu do problema da área.

Foi ***Issac Barrow***(1630-1677), professor de Newtom em Cambridge que, descobriu a estreita relação entre esses dois problemas, relação esta expressa pelo Teorema Fundamental do Cálculo.

Newton e Leibniz exploraram essa relação e usaram-na para desenvolver o cálculo como um método matemático sistemático. Em particular, eles viram que o T.F.C os capacitou a computar as áreas muito mais facilmente, sem que fosse necessário calculá-las como limites de somas.

Teorema 5.19 ***(Teorema Fundamental do Cálculo/T.F.C)***

Seja f uma função contínua em $[a,b]$.

1. *Se* $g(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ *para todo* $x \in [a,b]$, *então* $g'(x) = f(x)$.

2. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, *quando F for uma antiderivada de f.*

Corolário 5.20 *Se f é contínua em [a,b] e F é uma antiderivada de f, então*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Integrais definidas e áreas planas

Como podemos ver o T.F.C pode ser usado para calcular áreas através da integral definida.

Aplique o T.F.C nas integrais definidas abaixo e interprete cada uma das funções geometricamente.

1. $\displaystyle\int_0^2 x^2 dx$

2. $\displaystyle\int_0^{\pi} sen\, x dx$

3. $\displaystyle\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx$

4. $\displaystyle\int_{-2}^3 |x| dx$

5. $\displaystyle\int_{-1}^3 e^x dx$

6. $\displaystyle\int_4^2 3^x dx$

7. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x} dx$

Teorema 5.21 *Se* $u = g(x)$, *então* $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$

O Teorema 5.21 afirma que, após fazer a substituição $u = g(x)$ e $du = g'(x)dx$, podemos utilizar os valores de g que corresponde a $x = a$ e $x = b$, respectivamente, como os limites da integral que envolve u. É, pois, desnecessário voltar á variável original x após integrar.

Exemplo 5.9 *Calcular* $\int_2^{10} \frac{3}{\sqrt{5x-1}}\, dx$.

Exemplo 5.10 *Calcular* $\int_0^{\pi/4} (1 + sen\ 2x)^3 \cos 2x dx$.

Teorema 5.22 *Seja f contínua em [-a,a]*

(i) *Se f é uma função par,*

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

(ii) *Se f é uma função ímpar,*

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

Exemplo 5.11 *Calcular*

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^4 + 3x^2 + 1)dx$ *b)* $\displaystyle\int_{-2}^{2}(x^5 + 3x^3 + x)dx$

Teorema 5.23 *Se f e g são funções contínuas e $f(x) \geq g(x)$ para todo x em [a,b], então a área A da região delimitada pelos gráficos de f, g, x=a e x=b é*

$$A = \int_{a}^{b}[f(x) - g(x)]dx$$

Exemplo 5.12 *Achar a área da região delimitada pelos gráficos das equações $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.*

5.5 Técnicas de Integração

5.5.1 Integração por partes

Se $u = f(x)$ e $v = g(x)$, e se f' e g' são contínuas, então

$$\int u \; dv = uv - \int v \; du$$

Exemplo 5.13 *Calcular* $\int xe^x dx$.

Exemplo 5.14 *Calcular* $\int \ln x dx$.

Exemplo 5.15 *Calcular* $\int e^x \cos x dx$.

Exemplo 5.16 *Calcular* $\int x^2 \; e^x dx$.

5.5.2 Integrais trigonométricas

Nesta seção usaremos as identidades trigonométricas para integrar certas combinações de funções trigonométricas. Começaremos com as potências de seno e cosseno.

Exemplo 5.17 *Calcular* $\int \cos^3 x dx$.

Exemplo 5.18 *Calcular* $\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x dx$.

Exemplo 5.19 *Ache* $\int \operatorname{sen}^4 x dx$.

Estratégia para calcular $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x dx$

(a) Se a potência do cosseno é ímpar (n=2k+1), guarde um fator cosseno e use $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ para expressar os fatores remanescentes em termos de seno:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^m x \cos^{2k+1} x dx &= \int \operatorname{sen}^m x (\cos^2 x)^k \cos x dx \\ &= \int \operatorname{sen}^m x (1 - \operatorname{sen}^2 x)^k \cos x dx \end{aligned}$$

Neste caso, substitua $u = \operatorname{sen} x$.

(b) Se a potência de seno é ímpar (m=2k+1), guarde um fator seno e use $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$, para expressar os fatores remanescentes em termos de cosseno:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^{2k+1} x \cos^n x dx &= \int (\operatorname{sen}^2 x)^k \cos^n x \operatorname{sen} x dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x \operatorname{sen} x dx \end{aligned}$$

Então substitua $u = \cos x$. [Note que se ambos os fatores de seno e cosseno são ímpares, podemos usar (a) ou (b)]

(c) Se as potências de seno e cosseno são pares, utilizamos as identidades dos ângulos-metade

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

Algumas vezes é útil usar a identidade

$$\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$$

Exemplo 5.20 *Calcule* $\int \cos^3 x \operatorname{sen}^4 x dx$.

Podemos empregar uma estratégia semelhante para avaliar as integrais da forma $\int \operatorname{tg}^m x \sec^n x dx$.

Exemplo 5.21 *Calcule* $\int \operatorname{tg}^6 x \sec^4 x dx$.

Exemplo 5.22 *Calcule* $\int \operatorname{tg}^5 \theta \sec^7 \theta d\theta$.

Estratégia para avaliar $\int \operatorname{tg}^m x \sec^n x dx$

(a) Se a potência da secante é par ($n = 2k, k \geq 2$), guarde um fator de $\sec^2 x$ e use

$\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ para expressar os fatores remanescentes em termos de $\operatorname{tg} x$:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^m x \sec^{2k} x dx &= \int \operatorname{tg}^m x (sec^2 x)^{k-1} \sec^2 x dx \\ &= \int \operatorname{tg}^m x (1 + \operatorname{tg}^2 x)^{k-1} \sec^2 x dx \end{aligned}$$

Assim, substitua $u = \operatorname{tg} x$.

(b) Se a potência da tangente é ímpar (m=2k+1), guarde um fator de $\sec x \operatorname{tg} x$ e use

$\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$ para expressar os fatores remanescentes em termos de $\sec x$:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^{2k+1} x \sec^n x dx &= \int (\operatorname{tg}^2 x)^k \sec^{n-1} x \sec x \operatorname{tg} x dx \\ &= \int (\sec^2 x - 1)^k \sec^{n-1} x \sec x \operatorname{tg} x dx \end{aligned}$$

Então substitua $u = \sec x$.

Exemplo 5.23 *Calcular* $\int \operatorname{tg}^3 x dx$.

Finalmente, podemos usar outras identidades trigonométricas. Para avaliar as integrais

$(a) \int \operatorname{sen} mx \cos nx dx$;
$(b) \int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx dx$;
$(c) \int \cos mx \cos nx dx$; use a identidade correspondente:

(a) $\operatorname{sen} A \ \cos B = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(A-B) + \operatorname{sen}(A+B)]$

(b) $\operatorname{sen} A \ \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$

(c) $\cos A \ \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) + \cos(A+B)]$

Exemplo 5.24 *Calcule* $\int \operatorname{sen} 4x \ \cos 5x \ dx$.

Exemplo 5.25 *Calcule* $\int \cos 5x \ \cos 3x \ dx$.

5.5.3 Substituição Trigonométrica

Na tabela a seguir listamos as substituições trigonométricas que são eficazes para as expressões radicais dadas em razão de certas identidades trigonométricas. Em cada caso, a restrição de θ é imposta para assegurar que a função que define a substituição seja um a um (possui inversa).

Expressão	Substituição	Identidade
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a\,\text{sen}\,\theta,\ \ -\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$	$1 - \text{sen}^2\theta = \cos^2\theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a\,\text{tg}\,\theta,\ \ -\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$	$1 + \text{tg}^2\theta = \sec^2\theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a\sec\theta,\ \ 0 \leq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ ou $\pi \leq \theta < \dfrac{3\pi}{2}$	$\sec^2\theta - 1 = \text{tg}^2\theta$

Exemplo 5.26 *Calcule* $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx.$

Exemplo 5.27 *Ache* $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}dx$

Exemplo 5.28 *Calcule* $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx,\ a > 0.$

5.5.4 Integração de Funções Racionais por Frações Parciais

Integração de funções racionais por frações parciais quando o denominador tem somente fatores lineares

Recordemos que, se H é uma função racional, então $H(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, onde $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios. Agora estabeleceremos regras para o cálculo de $\displaystyle\int H(x)\ dx$.

Consideremos o caso específico $H(x) = \dfrac{2}{(x^2-1)}$. É fácil ver que

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1}.$$

A expressão á esquerda da equação é chamada decomposição em frações parciais de $\dfrac{2}{(x^2-1)}$. Para achar $\displaystyle\int H(x)\ dx$, integramos cada uma das frações que constituem a decomposição, obtendo

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{x^2-1}dx &= \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{-1}{x+1}dx \\ &= \ln|x-1| - \ln|x+1| + C \\ &= \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C\end{aligned}$$

Estamos interessados em calcular integrais do tipo

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

onde o grau de $P(x)$ é menor do que o grau de $Q(x)$. Se isto não ocorrer, teremos que recorrer à divisão para chegar à forma adequada. Por exemplo, dada

$$\frac{x^3-6x^2+5x-3}{x^2-1}$$

obtemos, por divisão,

$$\frac{x^3-6x^2+5x-3}{x^2-1} = x-6+\frac{6x-9}{x^2-1}$$

Passamos então á decomposição de $\dfrac{6x-9}{x^2-1}$ em frações parcias.

Para escrever $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ como uma soma de frações parciais usamos a fatoração de $Q(x)$ num produto de fatores lineares e quadráticos. A existência desses fatores é garantida pelo Teorema Fundamental da Álgebra.

Caso 1: os fatores de Q(x) são todos lineares e nenhum é repetido.

$$Q(x) = (a_1x+b_1)(a_2x+b_2)...(a_nx+b_n)$$

Nesse caso, teremos:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + ... + \frac{A_n}{a_nx+b_n},$$

onde A_1, $A_2 \ldots, A_n$ são constantes a serem determinadas.

Exemplo 5.29 *Calcule* $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^3-x^2-2x}dx$

Exemplo 5.30 *Mostre que* $\displaystyle\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$ *e que* $\displaystyle\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C$

Caso 2: os fatores de Q(x) são todos lineares e alguns são repetidos, ou seja, em algum $(\mathbf{a_ix+b_i})^{\mathbf{p_i}}$ têm-se: $\mathbf{p_i > 1}$

$$Q(x) = (a_1x+b_1)^{p_1}(a_2x+b_2)^{p_2}...(a_nx+b_n)^{p_n},\ p_i \in \mathbb{N}$$

Se (a_ix+b_i) é um fator que se repete p vezes $(p_i = p)$ então o correspondente a este fator é a soma das seguintes p frações parciais:

$$\frac{A_1}{(a_ix+b_i)^p} + \frac{A_2}{(a_ix+b_i)^{p-1}} + ... + \frac{A_{p-1}}{(a_ix+b_i)^2} + \frac{A_p}{(a_ix+b_i)^1},$$

onde A_1, $A_2 \dots, A_n$ são constantes a serem determinadas para cada fator $(a_i x + b_i)$ que se repete p vezes.

Exemplo 5.31 $\displaystyle\int \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1}dx = \int \frac{4x}{(x-1)^2(x+1)}dx$

Integração de funções racionais por frações parciais quando o denominador contém fatores quadráticos irredutíveis

Caso 3: Os fatores de Q(x) são lineares e quadráticos e nenhum fator quadrático é repetido.

Correspondendo ao fator quadrático $ax^2 + bx + c$ no denominador, temos uma fração parcial da forma $\dfrac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$.

Exemplo 5.32 $\displaystyle\int \frac{(x^2 - 2x - 3)}{(x - 1)(x^2 + 2x + 2)}dx$

Caso 4: Os fatores de Q(x) são lineares e quadráticos e alguns dos fatores quadráticos são repetidos.

Se $ax^2 + bx + c$ for um fator quadrático de $Q(x)$ que se repete p vezes, então, correspondendo ao fator $(ax^2 + bx + c)^p$, teremos a soma das p frações parciais:

$$\frac{A_1x + B_1}{(ax^2 + bx + c)^p} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^{p-1}} + ... + \frac{A_px + B_p}{(ax^2 + bx + c)^1}$$

ILUSTRAÇÃO: Se o denominador contém o fator $(x^2 - 5x + 2)^3$, correspondendo a esse fator,

$$\frac{Ax + B}{(x^2 - 5x + 2)^3} + \frac{Cx + D}{(x^2 - 5x + 2)^2} + \frac{Ex + F}{(x^2 - 5x + 2)^1}$$

ou de forma mais conveniente,

$$\frac{A(2x - 5) + B}{(x^2 - 5x + 2)^3} + \frac{C(2x - 5) + D}{(x^2 - 5x + 2)^2} + \frac{E(2x - 5) + F}{(x^2 - 5x + 2)^1}$$

Exemplo 5.33 $\displaystyle\int \frac{(1 - x + 2x^2 - x^3)}{x(x^2 + 1)^2}dx$

Exercícios - Capítulo 5

Exercício 5.1 *Calcule*

a) $\displaystyle\int (4x+3)dx$ *b)* $\displaystyle\int (9t^2-4t+3)dt$ *c)* $\displaystyle\int \left(\frac{1}{z^3}-\frac{3}{z^2}\right)dz$

d) $\displaystyle\int \left(3\sqrt{u}+\frac{1}{\sqrt{u}}\right)du$ *e)* $\displaystyle\int \left(2v^{5/4}+3v^{-4}\right)dv$ *f)* $\displaystyle\int \frac{8x-5}{\sqrt[3]{x}}dx$

g) $\displaystyle\int \frac{3}{4}\cos u du$ *h)* $\displaystyle\int \frac{7}{\csc x}dx$ *i)* $\displaystyle\int \frac{\sec t}{\cos t}dt$

j) $\displaystyle\int \sqrt{3x-2}\ dx$ *l)* $\displaystyle\int \sqrt[3]{8t+5}\ dt$ *m)* $\displaystyle\int v^2\sqrt{v^3-1}\ dv$

n) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt[3]{1-2x^2}}dx$ *o)* $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}+3)^4}{\sqrt{x}}dx$ *p)* $\displaystyle\int 3\,\mathrm{sen}\,4x\ dx$

q) $\displaystyle\int \cos 3x\sqrt[3]{\mathrm{sen}\,3x}dx$ *r)* $\displaystyle\int \frac{\cos t}{(1-\mathrm{sen}\,t)^2}dt$ *s)* $\displaystyle\int \sec^2 3x\,\mathrm{tg}\,3x\ dx$

Exercício 5.2 *Em qualquer ponto (x,y) de uma determinada curva, a reta tangente tem uma inclinação igual a* $4x-5$. *Se a curva contém o ponto (3,7), ache sua equação.*

Exercício 5.3 *A função custo marginal* C' *é dada por* $C'(x)=4x-8$ *quando* $C(x)$ *é o custo total da produção de* x *unidades. Se o custo da produção de 5 unidades for* $R\$20,00$, *ache a função custo total.*

Exercício 5.4 *O volume de água num tanque de* Vm^3 *quando a profundidade da água é* h *m. Se a taxa de variação de* V *em relação a* h *for* $\pi(4h^2+12h+9)$, *ache o volume de água no tanque quando a profundidade for de 3m.*

Exercício 5.5 *Calcule*

a) $\displaystyle\int_1^4 (x^2-4x-3)dx$ *b)* $\displaystyle\int_7^{12} dx$ *c)* $\displaystyle\int_{-1}^0 (2x+3)^2dx$

d) $\displaystyle\int_1^1 (4x^2-5)^{100}dx$ *e)* $\displaystyle\int_{-3}^6 |x-4|dx$ *f)* $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{y}(\sqrt{y}+1)^3}\ dy$

g) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \cos(3\theta)d\theta$ *h)* $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} (4\,\mathrm{sen}\,2\theta+6\cos 3\theta)d\theta$ *i)* $\displaystyle\int_{-\pi/6}^{\pi/6} (x+\mathrm{sen}\,5x)dx$

j) $\int_0^1 \frac{z}{(z^2+1)^3}dz$	*k)* $\int_0^{\pi} t \operatorname{sen} 3t dt$	*l)* $\int_1^{10} \sqrt{5x-1}dx$
m) $\int_0^2 t^2\sqrt{t^3+1}dt$	*n)* $\int_{-2}^{5} \lvert x-3\rvert dx$	*o)* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(2x)\ dx$
p) $\int_1^2 x\ln x\ dx$	*q)* $\int_0^2 x^2 3^x dx$	*r)* $\int_0^2 xe^{2x}\ dx$

Exercício 5.6 *Achar a área da região delimitada pelos gráficos de* $y+x^2=6$ *e* $y+2x-3=0$.

Exercício 5.7 *Achar a área da região delimitada pelos gráficos de* $y=x^2$ *e* $y=4x$.

Exercício 5.8 *Calcule*

a) $\int 3^{2x}\ dx$	*b)* $\int 5^{x^2} x\ dx$	*c)* $\int \sqrt{10^{3x}}\ dx$
d) $\int x^2 10^{x^3}\ dx$	*e)* $\int a^{z\ln z}(\ln z+1)\ dz$	*f)* $\int 5^{x^4+2x}(2x^3+1)\ dx$
g) $\int x\ln x\ dx$	*h)* $\int \log_a x\ dx$	*i)* $\int x^3e^{x^2}\ dx$
j) $\int x\cos x dx$	*k)* $\int e^x senx\ dx$	*l)* $\int xe^{-x}\ dx$
m) $\int x^2e^{3x}\ dx$	*n)* $\int x\cos 5x\ dx$	*o)* $\int x\sec x \operatorname{tg} x dx$
p) $\int x^2\cos x\ dx$	*q)* $\int \sqrt{x}\ln x\ dx$	*r)* $\int \operatorname{sen}^5 x\ dx$
s) $\int \operatorname{sen}^2 x\cos^2 x\ dx$	*t)* $\int \operatorname{sen}^3 x\cos^2 x\ dx$	*u)* $\int \operatorname{tg}^3 x\sec^4 x dx$
v $\int \operatorname{tg}^3 x\sec^2 x dx$	*w)* $\int \sqrt{\operatorname{sen} x}\cos^3 x dx$	*x)* $\int \frac{1}{x\sqrt{4-x^2}}dx$
y) $\int \frac{1}{x\sqrt{9+x^2}}dx$	*z)* $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-25}}dx$	*α)* $\int \frac{5x-12}{x(x-4)}dx$
β) $\int \frac{37-11x}{(x+1)(x-2)(x-3)}dx$	*γ)* $\int \frac{6x-11}{(x-1)^2}dx$	

Exercício 5.9 *Resolva a equação diferencial sujeita às condições dadas.*

a) $f'(x) = 12x^2 - 6x + 1; \quad f(1) = 5$

b) $f''(x) = 4x - 1; \quad f'(2) = -2; \ f(1) = 3$

c) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 3 \operatorname{sen} x - 4\cos x; \quad y = 7$ *e* $y' = 2$ *se* $x = 0$

Exercício 5.10 *Se um automóvel parte do repouso, qual a aceleração constante que lhe permitirá percorrer 150 metros em 10 segundos?*

Exercício 5.11 *Se um ponto se move em uma reta coordenada com a aceleração* $a(t) = 2 - 6t$, *e as condições iniciais,* $v(0) = -5$ *e* $s(0) = 4$, *determine* $s(t)$.

Exercício 5.12 *Nos exercícios* 1 *a* 10 *use mudança de variável para resolver as integrais:*

1) $\displaystyle\int \sqrt{1-4y}\, dy$ 2) $\displaystyle\int \sqrt[3]{6-2x}\, dx$ 3) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2-9}\, dx$ 4) $\displaystyle\int x^2(x^3-1)^{10}\, dx$

5) $\displaystyle\int 5x\sqrt[3]{(9-4x^2)^2}\, dx$ 6) $\displaystyle\int \frac{y^3\, dy}{(1-2y^4)^5}$ 7) $\displaystyle\int (x^2-4x+4)^{4/3}\, dx$ 8) $\displaystyle\int x\sqrt{x+2}\, dx$

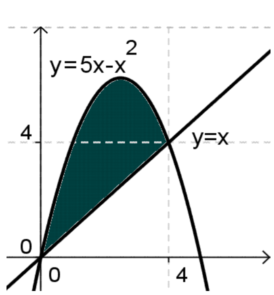
9) $\displaystyle\int \frac{2r\, dr}{(1-r)^7}$ 10) $\displaystyle\int \sqrt{3-2x}\, x^2\, dx$

Exercício 5.13 *Nos exercícios de* 11 *a* 15 *use integração por partes para resolver as integrais:*

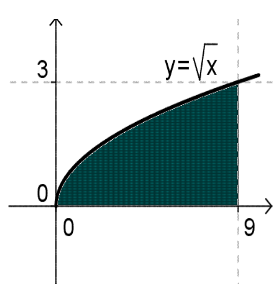
11) $\displaystyle\int xe^{3x}\, dx$ 12) $\displaystyle\int x \, sec\, x \, tg\, x\, dx$ 13) $\displaystyle\int (ln\, x)^2\, dx$

14) $\displaystyle\int x\, sec^2\, x\, dx$ 15) $\displaystyle\int x^2 ln\, x\, dx$

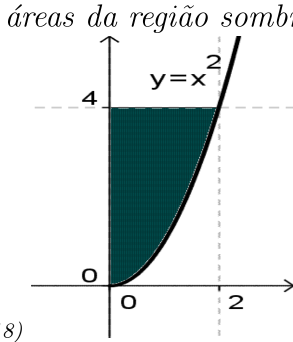
Exercício 5.14 *Nos exercícios* 16 *a* 19 *calcule as áreas da região sombreada:*



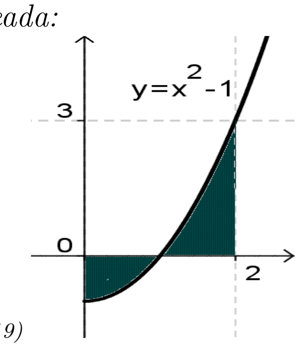
16)



17)



18)



19)

Exercício 5.15 *Calcule a área da região situada entre a curva* $y = x^2 + x - 2$, *o eixo das abscissas e as retas* $x = 0$ *e* $x = 3$.

Exercício 5.16 *Calcule a área da região situada entre a curva* $y = x^3$, *o eixo das abscissas e as retas* $x = -2$ *e* $x = 2$.

Exercício 5.17 *Calcule a área da região situada entre as curvas* $y = x^2$ *e* $y = -x^2 + 4x$.

Exercício 5.18 *Nos exercícios de a) a d) use as substituições trigonométricas* $u = asen\theta$, $u = atg\theta$, $u = asec\theta$ *para integrandos que contenham as respectivas expressões:* $\sqrt{a^2 - u^2}, \sqrt{a^2 + u^2}, \sqrt{u^2 - a^2}$

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 4}}$ b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{25 - x^2}}$ c) $\displaystyle\int \frac{dx}{(4x^2 - 9)^{3/2}}$

d) $\displaystyle\int \frac{e^{-x}dx}{(9e^{-2x} + 1)^{3/2}}$

Exercício 5.19 *Nos exercícios de a) a e) use frações parciais para calcular as integrais:*

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 4}dx$ b) $\displaystyle\int \frac{4w - 11}{2w^2 + 7w - 4}dw$ c) $\displaystyle\int \frac{x^2 - 3x - 7}{(2x + 3)(x + 1)^2}dx$

d) $\displaystyle\int \frac{3z + 1}{(z^2 - 4)^2}dz$ e) $\displaystyle\int \frac{(t^2 + t + 1)}{(2t + 1)(t^2 + 1)}dt$

Respostas dos exercícios

Cap.1

Exercício 1.1

1) $]-2,\infty[$
2) $]-1/2,\infty[$
3) $]-\infty,3/4]$
4) $]-\infty,-1]$
5) $[4,8]$
6) $[-1/2,2[$
7) $]-5/3,4/3]$
8) $]-2,1]$
9) $[9,19[$
10) $]2/3,14/3]$
11) $[-1,\infty[$
12) $]-2,\infty[$

Exercício 1.2

1) $\{-5/2,1\}$
2) $\{4/3,4\}$
3) $\{-1/4,4\}$
4) $\{5/3,1\}$
5) $\{-2/3,1/2\}$
6) $\{-4/3,-1\}$
7) $\{2/3,6\}$
8) $\{4/11,4\}$
9) $\{-2,-1,1,2\}$

Exercício 1.3

1) $]-11,3[$
2) $]1,4[$
3) $[2/3,2]$
4) $]-\infty,-1]\cup[-1/3,\infty[$
5) $]-\infty,-2[\,\cup\,]12,\infty[$
6) $]-2,8[$
7) $[-1/2,4]$
8) $]-\infty,-1/2]\cup[13/2,\infty[$
9) $]-\infty,1[\cup\,]4,\infty[$
10) $]-\infty,2/3]\ \cup\ [10,\infty[$
11) $]1,\infty[$
12) $]-7,1/3[$
13) $[-9/2,3/2]$
14) $]-\infty,-1]\cup[6,\infty[$
15) $]-\infty,10/9[\,\cup\,]2,\infty[$
16) $[9/11,5/3]$
17) $\{x\in\mathbb{R}/x\le 0 \text{ ou } x\ge 6\}$

Cap.2

2.1. a) sim, $[4,+\infty[$ b) sim, $]-\infty,-2]\cup[2,+\infty[$ c) sim, $[-2,2]$ d) não e) sim, $]-\infty,+\infty[$
f) não g) sim, $]-\infty,+\infty[$ h) sim, $]-\infty,+\infty[$ i) não.

2.2.a) x^2 b) $\frac{4}{3}\pi x^3$ c) πx^3 d) $\frac{26}{3}\pi x^2$; $\frac{10}{3}\pi x^3$

2.3.a) $34^\circ C$ b) 3 horas
2.4. a) 5 b) -5 c) -1 d)$2a+1$ e)$2x+1$ f) $4x-1$ g)$4x-2$ h) $2x+2h-1$ e)$2x+2h-2$ j) 2
2.5. a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{2}{3}$ c) 0 d) -1 e) $\nexists$
2.6.a) -5 b) -6 c) -3 d) 30 e) $2h^2+9h+4$ f) $8x^4+10x^2-3$
g) $2x^4-7x^2$ h) $2x^2+(4h+5)x+(2h^2+5h-3)$
2.7. a) 1 b) $\sqrt{11}$ c)$\sqrt{3}$ d) $\nexists$ e) 0
2.8. a) $(f+g)(x)=x^2+x-6$ domínio:$]-\infty,+\infty[$; $(f-g)(x)=-x^2+x-4$ domínio:$]-\infty,+\infty[$;
$(f.g)(x)=x^3-5x^2-x+5$ domínio:$]-\infty,+\infty[$; $(f/g)(x)=\dfrac{x-5}{x^2-1}$ domínio:$\mathbb{R}-\{-1,1\}$;
b) $(f+g)(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{x^2-x}$ domínio:$\mathbb{R}-\{0,1\}$; $(f-g)(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-x}$ domínio:$\mathbb{R}-\{0,1\}$;
$(f.g)(x)=\dfrac{x+1}{x^2-x}$ domínio:$\mathbb{R}-\{0,1\}$; $(f/g)(x)=\dfrac{x^2+x}{x-1}$ domínio:$\mathbb{R}-\{0,1\}$;
c) $(f+g)(x)=\sqrt{x}+x^2-1$ domínio:$[0,+\infty[$; $(f-g)(x)=\sqrt{x}-x^2-1$ domínio:$[0,+\infty[$;
$(f.g)(x)=\sqrt{x}(x^2-1)$ domínio:$[0,+\infty[$; $(f/g)(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x^2-1}$ domínio:$[0,1[\cup]1,+\infty[$;
2.9. a) $(f\circ g)(x)=x+5$ domínio:$]-\infty,+\infty[$; $(g\circ f)(x)=x+5$ domínio:$]-\infty,+\infty[$;
$(f\circ f)(x)=x-4$ domínio:$]-\infty,+\infty[$; $(g\circ g)(x)=x+14$ domínio:$]-\infty,+\infty[$;
b) $(f\circ g)(x)=x^2-6$ domínio:$]-\infty,+\infty[$; $(g\circ f)(x)=x^2-10x+24$ domínio:$]-\infty,+\infty[$;
$(f\circ f)(x)=x-10$ domínio:$]-\infty,+\infty[$; $(g\circ g)(x)=x^4-2x^2$ domínio:$]-\infty,+\infty[$;
c) $(f\circ g)(x)=\sqrt{x^2-4}$ domínio:$]-\infty,-2]\cup[2,+\infty[$; $(g\circ f)(x)=x-4$ domínio:$[2,+\infty[$;
$(f\circ f)(x)=\sqrt{\sqrt{x-2}-2}$ domínio:$[6,+\infty[$; $(g\circ g)(x)=x^4-4x^2+2$ domínio:$]-\infty,+\infty[$;
d) $(f\circ g)(x)=|x+2|$ domínio:$]-\infty,+\infty[$; $(g\circ f)(x)=|x|+2$ domínio:$]-\infty,+\infty[$;
$(f\circ f)(x)=|x|$ domínio:$]-\infty,+\infty[$; $(g\circ g)(x)=|x+2|+2$ domínio:$]-\infty,+\infty[$;
2.11. a) domínio: $]-\infty,+\infty[$ imagem: $]-\infty,+\infty[$ b) domínio: $]-\infty,+\infty[$ imagem: $[-1,+\infty[$
c) domínio: $[-1,+\infty[$ imagem: $[0,+\infty[$ d) domínio: $]-\infty,2]$ imagem: $[0,+\infty[$
e) domínio: $]-\infty,0]$ imagem: $[0,+\infty[$ f) domínio: $]-\infty,+\infty[$ imagem: $[0,+\infty[$
g) domínio: $]-\infty,+\infty[$ imagem: $]-\infty,4]$ h) domínio: $]-\infty,+\infty[$ imagem: $[4,+\infty[$
i) domínio: $\mathbb{R}-\{2\}$ imagem: $\mathbb{R}-\{0\}$ j) domínio: $]-\infty,+\infty[$ imagem: $\{-2,2\}$
k) domínio: $]-\infty,+\infty[$ imagem: $\mathbb{R}-\{3\}$ l) domínio: $]-\infty,+\infty[$ imagem: $[-4,+\infty[$
m) domínio: $]-\infty,+\infty[$ imagem: $]-\infty,6[$ n) domínio: $]-\infty,+\infty[$ imagem: $]-\infty,-2[\cup\{0\}\cup]1,+\infty[$
o) domínio: $\mathbb{R}-\{2\}$ imagem: $[0,+\infty[$ p) domínio: $]-\infty,+\infty[$ imagem: $]-\infty,5]$

2.12. a) $]-\infty,3]$ b) $[-2,2]$ c) -1 d) 1 e) $-\frac{3}{2},-\frac{3}{4}$ $f(x)=\begin{cases} 2, & \text{se } 1<x\le 3;\\ 2x, & \text{se } -1<x\le 1.\\ -x-3, & \text{se } -2<x\le 1.\\ -1, & \text{se } x\le -2.\end{cases}$

2.13. a) $]-2,0]\cup\{1\}\cup[2,+\infty[$ b) $]-2,0[\cup\{2\}\cup[3,+\infty[$;

c)$\nexists$ d)$\nexists$ e) $-\frac{1}{2},-\frac{5}{4}$ $f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{se } x\geq 2;\\ 2, & \text{se } x=1.\\ x-1, & \text{se } -1<x\leq 0.\\ -2x-4, & \text{se } -2<x<-1.\end{cases}$

2.14. a) $R\$12,10$ b) $p(x)=\begin{cases} 0,10x, & \text{se } 0\leq x\leq 100;\\ 3+0,07x, & \text{se } x>100.\end{cases}$

2.15. 25 passageiros 2.17 $a)\{x\in\mathbb{R}|x<\dfrac{5}{12}\}$ $b)\{x\in\mathbb{R}|x>-\dfrac{3}{8}\}$ $c)\ \mathbb{R}$

$d)\ ]-\infty,-10[\cup]0,+\infty[$ $e)\{x\in\mathbb{R}|x>2,\}-\{3\}$ $f)\{x\in\mathbb{R}|x<\dfrac{5}{2}\}-\{2\}$

$g)\ \{x\in\mathbb{R}|x>0 \text{ e } x\neq\dfrac{1}{2}\}$ $h)\ \{x\in\mathbb{R}|x>\dfrac{12}{5}\}$ $i)\ \{x\in\mathbb{R}|x>3\}$

2.18. $a)\ ]-\infty,-2[\cup]4,+\infty[$ $b)\ ]-\infty,-3[\cup]3,+\infty[$ $c)\ ]-\frac{5}{3},-\frac{3}{2}[$ $d)\ [3,+\infty[\cup\{-2\}$ $e)\ ]-\infty,-1[\cup]2,\frac{7}{2}]$ $f)\ [-8,-\frac{3}{2}[\cup]5,\infty[$

2.19. a) $T=0^o$ b) $a=\frac{1}{273}$ c) $T=\frac{73}{127a}$ 2.20. a)15 mg. b)$60(\frac{1}{2})^{\frac{t}{6}}$

2.21. $13h$ e $30min$ há dois dias. 2.22.a) $y=\frac{200}{3}-\frac{4}{5}x$ b) $V(x)=\frac{240}{3}x-\frac{24}{25}x^2$

2.23. aproximadamente 7,3. 2.24. 50 ou 250 2.25. $V(x)=4x^3-252x^2+3800x$

2.26. a) 200 b) $\frac{2}{3}$ c) $\approx 1,3.10^7$ bactérias

2.27. 16 2.28. sangue: 7,4 básico; tomate: 4,2 ácido; leite: 6,4 ácido; café: 5,9 ácido

Cap.3

Exercício 3.1: a) 6 b) 0 c) $\sqrt{15}$ d) 2 e) 0 f) 1 g) $\frac{1}{2}$ h) $\frac{1}{2}$ i) 9 j) 0
l) -7 m) 2a n) $-\frac{1}{8}$ o)54 p) -2a q) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ r) 2 s) -7 t) $\frac{1}{12}$ u) 3 v) $\frac{3}{2}$ x) 1

Exercício 3.2: $a)\ -3,\ 2,\ \nexists$ $b)\ 8,\ 0,\ \nexists$ $c)\ 4$ $d)\ \nexists$ $e)\ 2$ Exercício 3.3: $k=-6$

Exercício 3.4: $a=-3/2$ e $b=1$ Exercício 3.5: a) $T(x)=\begin{cases} 0,15x, & \text{se x} \leq 20.000\\ 0,20x-1000, & \text{se } x>20.000\end{cases}$.

b) R\$3.000 e R\$3.000 Exercício 3.6: b) i) 40 ii) 35 iii) 140 iv) 130

Exercício 3.7: a) -1 b) 1 c) $\nexists$ Exercício 3.8: $\nexists$.

Exercício 3.9 : a)$\nexists$ b) $+\infty$ c)$\nexists$ d) $-\infty$ Exercício 3.10: a) 1 b) 1 c)1 d) $+\infty$ e)$+\infty$
f) $+\infty$ g)3 h) 2 i)$\nexists$ j) 0 k)0 l) 0.

Exercício 3.11: a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) $-\infty$ d) $+\infty$ e) $-\infty$ f) $+\infty$ g) $\frac{2}{5}$
h) $-\frac{2}{5}$ i) $\frac{7}{3}$ j)0 k) $+\infty$ l) $\frac{1}{2}$ m) $+\infty$ n) $-\infty$ o) 1 p) -1 q) 0 r) $-\infty$
s) e t) e^2 u) e^2 v) e^2 w) 2 x) $ln5$ y) $\frac{3}{4}$ z) 2 α) $25\,ln5$

Exercício 3.12: $a)x=-2,\ x=2,\ y=0$ $b)$ Nenhuma, $y=2$ $c)\ x=-3,\ x=1,\ y=1$
$d)x=-3,\ x=3,\ y=4$ $e)$ Nenhuma $f)\ x=7,\ \ y=-1$
$g)x=-1,\ y=0$ $h)$ Nenhuma, $y=1$ $i)\ x=-2,\ \ y=0$

Exercício 3.13: a) contínua b) descontínua c) descontínua d) descontínua

Cap.4

Exercício 4.1: a) $10a-4;\ \ y=16x-20$ b) $3a^2;\ \ y=12x-16$ c) $3;\ \ y=3x+2$

Exercício 4.2: a) $f'(x)=-10x+8$ b) $f'(x)=3x^2+1$ c) $f'(x)=\dfrac{2}{3}x-7$

Exercício 4.3:

1) $f'(x)=7$	2) $f'(t)=t^3-t$	3) $g'(x)=-\dfrac{6}{x^3}-\dfrac{20}{x^5}$	4) $g'(x)=-3$
5) $f'(x)=x^2-1$	6) $H'(x)=-\dfrac{25}{6x^6}$	7) $f'(x)=-2-2x$	8) $V'(r)=4\pi r^2$
9)$f'(s)=3\sqrt{3}s^2-2\sqrt{3}s$	10) $f'(x)=8x+1$	11) $f'(y)=10y^9+35y^4-3y^2$	12) $f'(x)=24x^2-4x+20$
13) $f'(x)=3x^2-6x+5$	14) $F'(x)=2x-\dfrac{2}{x^3}$	15) $f'(x)=70x^6+60x^4-15x^2-6$	16) $f'(x)=12x^3-10x$
17) $f'(x)=x^2+6x$	18) $f'(x)=16x(4x^2+3)$	19) $f'(x)=x^7-4x^3$	20) $f'(x)=16x^3+\dfrac{4}{x^5}$
21) $f'(y)=-18y^2(7-3y^3)$	22) $f'(x)=7x^6-10x^4+15x^2$	23) $f'(x)=4x^3-\dfrac{4}{x^5}$	24) $f'(t)=10t^4+4t^3-12t^2-4t$
25) $f'(x)=\sec x(2\text{tg}^2x+1)$	26) $f'(x)=3\cos x$	27) $f'(x)=\cos x-\text{sen}\,x$	28) $f'(x)=\sec^2 x-\text{cosec}^2x$
29) $f'(x)=4\sec x\text{tg}x+2\text{cosec}\,x\text{cotg}\,x$	30) $f'(x)=2(\cos t-t\text{sen}\,t)$	31) $f'(x)=4x(2\cos x-x\text{sen}\,x)$	32) $g'(x)=x\cos x$
33) $g'(x)=2\cos y+y\text{sen}\,y$	34) $h'(x)=4\cos 2x$	35) $f'(x)=\cos x(x^2+2)$	36) $f'(x)=-x^2\text{sen}\,x$
37) $h'(y)=y(3y+\text{sen}\,y+2\cos y)-\cos y$	38) $f'(x)=-3\text{cosec}\,x(1+2\text{cotg}^2\,x)$	39) $f'(t)=\text{tg}\,t(\cos t+\sec t)$	

Exercício 4.4:

40) $-\dfrac{1}{(x-1)^2}$ 41) $\dfrac{6}{(x+3)^2}$ 42) $-\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$ 43) $\dfrac{5}{(3y+4)^2}$ 44) $-\dfrac{4(x+1)}{(x-1)^3}$

45) $\dfrac{2+4x-x^2}{(x-2)^2}$ 46) $\dfrac{5(1-2t^2)}{(1+2t^2)^2}$ 47) $\dfrac{4a^2s}{(s^2+a^2)^2}$ 48) $-\operatorname{cosec} y(1+2\operatorname{cotg}^2 y)$ 49) $-\cos x\ (2+\operatorname{cotg}^2 x)$

50) $-\dfrac{2(z+1)\operatorname{sen} z+2\cos z}{(z+1)^2}$ 51) $\dfrac{t\cos t-\operatorname{sen} t}{t^2}$ 52) $\dfrac{1}{\cos x-1}$ 53) $\dfrac{\cos x+(x+4)\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$ 54) $\dfrac{1-4\sec t+\operatorname{sen}^2 t}{\cos t(\cos t-4)^2}$

55) $\dfrac{\operatorname{cosec} y(\operatorname{sen} y-1)+\cos^2 y}{\operatorname{sen} y(1-\operatorname{sen} y)^2}$ 56) $\dfrac{2\cos y}{(1-\operatorname{sen} y)^2}$ 57) $\dfrac{1+\cos x-\operatorname{sen} x}{(\cos x+1)^2}$ 58) $(x-\operatorname{sen} x)(1-\operatorname{sen} x)+(x+\cos x)(1-\cos x)$

59) $(z^2+\cos z)(2-cosz)+(2z-\operatorname{sen} z)^2$ 60) $-\dfrac{5\ \operatorname{cosec} t\ \operatorname{cotg} t}{(\operatorname{cosec} t+2)^2}$ 61) $-\dfrac{2\sec^2 y}{(\operatorname{tg} y-1)^2}$

Exercício 4.5:

62) $f'(0)=1$ 63) $f'(\frac{3\pi}{2})=-1$ 64) $f'(\frac{1}{2}\pi)=-\dfrac{2}{\pi}$ 65) $f'(\pi)=\dfrac{2}{\pi^3}$ 66) $f'(\pi)=\pi^2$ 67) $f'(0)=-1$

68) $f'(\pi)=2$ 69) $f'(\frac{1}{2}\pi)=-\frac{\pi}{2}+2$ 70) $f'(\frac{1}{4}\pi)=\sqrt{2}$ 71) $f'(\frac{1}{6}\pi)=2$ 72) $f'(\frac{2}{3}\pi)=-\dfrac{10}{3}$ 73) $f'(\frac{3}{4}\pi)=\dfrac{1}{2}$

Exercício 4.6: $y=12x-20$ Exercício 4.7: $x+2y-4=0$

Exercício 4.8:

a) $f'(x)=3e^{3x}$ *b)* $f'(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{e^x}$ *c)* $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$ *d)* $f'(x)=3.2^x\ln 2$ *e)* $f'(x)=\left(\dfrac{2}{e}\right)^x(\ln 2-1)$ *f)* $f'(x)=2e^{2x}\cos e^{2x}$

g) $f'(x)=\pi^x\ln\pi\sec^2\pi^x$ *h)* $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ *i)* $f'(x)=\dfrac{1}{2x}$ *j)* $f'(x)=\dfrac{1}{x}\cos(\ln x)$ *k)* $f'(x)=-\operatorname{tg} x$ *l)* $f'(x)=\sec^2(\operatorname{tg} x)\sec^2 x$

m) $f'(x)=\dfrac{1}{x\ln 3}$ *n)* $f'(x)=\dfrac{1}{x\ln\pi}$ *o)* $f'(x)=\dfrac{1}{x\ln 2}\cos(\log_2(3x))$ *p)* $f'(x)=-\dfrac{1}{2x\ln 5}\operatorname{sen}\ (\log_5(\sqrt{x}))$

Exercício 4.9:

a) $f'(x)=(x^2-3x+8)^2(6x-9)$ *b)* $g'(x)=-40(8x-7)^{-6}$ *c)* $f'(x)=-\dfrac{7x^2+1}{(x^2-1)^5}$ *d)* $f'(x)=5(8x^3-2x^2+x-7)^4(24x^2-4x+1)$

e) $N'(x)=2(6x-7)^2(8x^2+9)(168x^2-112x+81)$ *f)* $g'(w)=\dfrac{w^2+4w-9}{2w^{5/2}}$ *g)* $H'(x)=\dfrac{6(3-2x)}{(4x^2+9)^{3/2}}$ *h)* $H'(\theta)=-15\cos^4 3\theta sen3\theta$

i) $f'(x)=-6[xsen(3x^2)+\cos 3xsen3x]$ *j)* $h'(w)=\dfrac{4}{1-sen4w}$ *k)* $g'(z)=12\left(z^2-\dfrac{1}{z^2}\right)^5\left(z+\dfrac{1}{z^3}\right)$ *l)* $k'(r)=8r^2(8r^3+27)^{-2/3}$

Exercício 4.10: a) $k'(r)=20(4r+7)^4$; $k''(r)=320(4r+7)^3$ b) $f'(x)=3sen^2x\cos x$; $f''(x)=6senx\cos^2 x-3sen^3x$

Exercício 4.11:$k(2)=-4; k'(2)=15$ Exercício 4.12: $h'(4)=-\frac{2}{5}$ Exercício 4.13: a) $-9,8am/s$ b) $-19,6m/s$ c) -54,19m/s

Exercício 4.14: $160cm/s$ Exercício 4.16: a) $0,001\pi\ cm^3$/dia b) $0,004\pi cm^2$/dia Exercício 4.17: $128\pi cm^2/s$

Exercício 4.18: $\frac{32}{25}\pi\, m/min$ Exercício 4.19: $-\frac{2}{15}\sqrt{3}$ Exercício 4.20: $dC=200$ exemplares. Aumento real: 225 exemplares.

Exercício 4.21: $dP\approx 1,5$ milhares Exercício 4.22: $df\approx 6$ rádios Exercício 4.23: $dQ\approx 8$ unid. Exercício 4.24: $dQ\approx 12.000$ unid.

Exercício 4.25: $dV=27\,cm^3\ \dfrac{dV}{V}\approx 3\%$ Exercício 4.26: Aumentará em 2% Exercício 4.27:$dV=2,4\,\pi\,m^3$ Exercício 4.28: $\dfrac{dA}{A}=2,5\%$

Cap.5

Exercício 5.1: a) $2x^2+3x+c$ b) $3t^3-2t^2+3t+C$ c) $-\frac{1}{2z^2}+\frac{3}{z}+C$ d) $2u^{3/2}+2u^{1/2}+C$
e) $\frac{8}{9}v^{9/4}-v^{-3}+C$ f) $\frac{24}{5}x^{5/3}-\frac{15}{2}x^{2/3}+C$ g) $\frac{3}{4}\operatorname{sen} u+C$ h) $-7\cos x+C$ i) $\operatorname{tg} t+C$
j) $\frac{2}{9}(3x-2)^{3/2}+C$ l) $\frac{3}{32}(8t+5)^{4/3}+C$ m) $\frac{2}{9}(v^3-1)^{3/2}+C$ n) $-\frac{3}{8}(1-2x^2)^{2/3}+C$
o) $\frac{2}{5}(\sqrt{x}+3)^5+C$ p) $-\frac{3}{4}\cos 4x+C$ q) $\frac{1}{4}(\operatorname{sen} 3x)^{4/3}+C$ r) $\frac{1}{1-\operatorname{sen} t}+C$ s) $\frac{1}{6}\sec^2 3x+C$
Exercício 5.2: $y=2x^2-5x+4$ Exercício 5.3: $C(x)=2x^2-8x+10$ Exercício 5.4: $117\pi m^3$
Exercício 5.5: a) -18 b) 5 c)13/3 d) 0 e) 53/2 f) 5/36 g) $\frac{1}{3}$ h) $1-\sqrt{2}$ i) 0 j) $\frac{3}{16}$
k) $\frac{\pi}{3}$ l) $\frac{134}{3}$ m) $\frac{52}{9}$ n) $\frac{29}{2}$ 0) 1 p) $2\ln 2-\frac{3}{4}$ q) $\frac{36}{\ln 3}-\frac{36}{(\ln 3)^2}+\frac{16}{(\ln 3)^3}$ r) $\frac{1}{4}(3e^4+1)$
Exercício 5.6: 32/3 Exercício 5.7: 32/3
Exercício 5.8: a) $\frac{3^{2x}}{2\ln 3}+C$ b) $\frac{5^{x^2}}{2\ln 5}+C$ c) $\frac{2\sqrt{10^{3x}}}{3\ln 10}+C$
d) $\frac{10^{x^3}}{3\ln 10}+C$ e) $\frac{a^{z\ln z}}{\ln a}+C$ f) $\frac{5^{x^4+2x}}{2\ln 5}+C$
g) $\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C$ h) $x\log_a x-\frac{x}{\ln a}+C$ i) $\frac{x^2e^{x^2}}{2}-\frac{e^{x^2}}{2}+C$
j) $x\operatorname{sen} x+\cos x+C$ k) $-\frac{e^x\cos x}{2}+\frac{e^x\operatorname{sen} x}{2}+C$ l) $-(x+1)e^{-x}+C$
m) $\frac{1}{27}e^{3x}(9x^2-6x+2)+C$ n) $\frac{1}{5}x\operatorname{sen} 5x+\frac{1}{25}\cos 5x+C$ o) $x\sec x-\ln|\sec x+\operatorname{tg} x|+C$
p) $x^2\operatorname{sen} x+2x\cos x-2\operatorname{sen} x+C$ q) $\frac{2}{9}x^{3/2}(3\ln x-2)+C$ r) $-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C$
s) $\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x+C$ t) $-\frac{1}{3}\cos^3 x+\frac{1}{5}\cos^5 x+C$ u) $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x+\frac{1}{6}\operatorname{tg}^6 x+C$
v) $\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}+C$ w) $\frac{2}{3}\operatorname{sen}^{3/2}x-\frac{2}{7}\operatorname{sen}^{7/2}x+C$ x) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2}{x}-\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\right|+C$
y) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+9}}{x}-\frac{3}{x}\right|+C$ z) $\frac{\sqrt{x^2-25}}{25x}+C$ α) $3\ln|x|+2\ln|x-4|+C$
β) $4\ln|x+1|-5\ln|x-2|+\ln|x-3|+C$ γ) $6\ln|x-1|+\frac{5}{x-1}+C$
Exercício 5.9: a) $f(x)=4x^3-3x^2+x+3$ b) $f(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-8x+\frac{65}{6}$
c) $y=-3\operatorname{sen} x+4\cos x+5x+3$ Exercício 5.10: $3m/s^2$ Exercício 5.11: $s(t)=t^2-t^3-5t+4$

Exercício 5.12: 1) $-\dfrac{1}{6}(1-4y)^{3/2}+C$ 2) $-\dfrac{3}{8}(6-2x)^{4/3}+C$ 3) $\dfrac{1}{3}(x^2-9)^{3/2}+C$ 4) $\dfrac{1}{33}(x^3-1)^{11}+C$ 5) $-\dfrac{3}{8}(9-4x^2)^{5/3}+C$
6) $\dfrac{1}{32(1-2y^4)^4}+C$ 7) $\dfrac{3}{11}(x-2)^{11/3}+C$ 8) $\dfrac{2}{5}(x+2)^{5/2}-\dfrac{4}{3}(x+2)^{3/2}+C$
9) $-\frac{2}{5}(1-r)^{-5}+\frac{1}{3}(1-r)^{-6}+C$ 10) $-\frac{3}{4}(3-2x)^{3/2}+\frac{3}{10}(3-2x)^{5/2}-\frac{1}{28}(3-2x)^{7/2}+C$
Exercício 5.13: 11) $\frac{1}{3}xe^{3x}-\frac{1}{9}e^{3x}+C$ 12) $xsecx-ln\mid secx+tgx\mid+C$ 13) $xln^2x-2xlnx+2x+C$ 14) $xtgx-ln\mid secx\mid+C$ 15) $\frac{x^3}{3}lnx-\frac{x^3}{9}+C$
Exercício 5.14:16) $\frac{32}{3}$; 17) $18u.a$ 18) $\frac{16}{3}u.a.$ 19) $2u.a.$
Exercício 5.15: $\frac{59}{6}u.a.$ Exercício 5.16: $8u.a.$ Exercício 5.17: $\frac{8}{3}$
Exercício 5.18: $a)\frac{1}{2}ln\mid \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}\mid+C$ $b)\frac{1}{5}ln\mid\frac{5-\sqrt{25-x^2}}{x}\mid+C$ $c)-\frac{x}{9\sqrt{4x^2-9}}+C$ $d)-\frac{e^{-x}}{\sqrt{9e^{-2x}+1}}+C$
Exercício 5.19: $a)\frac{1}{4}ln\mid\frac{x-2}{x+2}\mid+C$ $b)ln\mid\frac{(w+4)^3}{2w-1}\mid+C$ $c)\frac{3}{x+1}+ln\mid x+1\mid-\frac{1}{2}ln\mid 2x+3\mid+C$
$d)\frac{5}{16(z+2)}-\frac{7}{16(z-2)}+\frac{1}{32}ln\mid\frac{z+2}{z-2}\mid+C$ $e)\frac{1}{10}ln\mid(t^2+1)(2t+1)^3\mid+\frac{2}{5}tg^{-1}(t)+C$

Referências Bibliográficas

[1] ANTON, H. Bivens, I. Dsvis, S. **Cálculo.**, 8ª Ed.. Porto Alegre: Bookman, 2007.

[2] ÁVILA, Geraldo. **Cálculo: diferencial e integral.**2ª Edição. Rio de Janeiro: LTC- Livros Técnicos e Científicos, 1978.

[3] FLEMMING, Diva M.. Cálculo. **Cálculo.** 5ª Ed.. São Paulo. McGraw-Hill do Brasil, 1983.

[4] GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo.**5ª Edição. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

[5] HOFFMANN, Laurence D. **Um curso moderno e suas aplicações.**Rio de Janeiro: LTC-Livros Técnicos e Científicos.

[6] LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica.**. V. Vol.1, 3ª Edição. São Paulo: Harbra, 1994.

[7] STEWART, J. **Cálculo**. V.1, 6ª Edição. São Paulo: CENGAGE Learning, 2009.

[8] SWOKOWSKI E. W. **Cálculo com Geometria Analítica.**. 2ª Edição. São Paulo: Makron Books, 1994.

[9] TAN S. T. **Matemática Aplicada a Administração e Economia.**2ª Edição. São Paulo: CENGAGE Learning, 2008.