O Binômio de Newton

Prof. Doherty Andrade –DMA-UEM

Nos inteiros a multiplicação de termos iguais, chamada de potenciação, é em geral definida por meio de indução:

$$a^n = \begin{cases} a, \text{ se } n = 1 \\ a \cdot a^{n-1}, \text{ se } n > 1. \end{cases}$$

Se $a \neq 0$, definimos $a^0 = 1$.

Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ não nulos e m, n naturais quaisquer, valem as seguintes propriedades. As provas seguem imediatamente das definições acima e do princípio de indução. São deixadas como exercício.

(a) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

(b) $(a^m)^n = a^{mn}$

(c) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

Outra operação nos números naturais que também é frequentemente definida por indução é fatorial. Para cada inteiro não negativo n, definimos o fatorial de n, denotado por $n!$, da seguinte forma

$$n! = \begin{cases} 1, \text{ se } n = 0 \\ n \cdot (n-1)!, \text{ se } n \geq 1 \end{cases}$$

Um dos resultados básicos de matemática em que fatorial aparece é o seguinte teorema.

Teorema 1: Sejam dados n inteiro positivo e conjuntos A e B com n elementos. O conjunto de todas as bijeções $f : A \to B$ tem $n!$ elementos.

A afirmação é óbvia quando $n = 1$. Suponha que a afirmação seja verdadeira para conjuntos com k elementos, vamos provar que o resultado se mantém para conjuntos com $(k+1)$ elementos.

Para um elemento $a \in A$ fixado, existem $(k+1)$ possibilidades de escolha para a imagem de a por um bijeção. Para cada uma dessas escolhas, existem $k!$ bijeções $f : A \to B$ (pela hipótese de indução). Segue que o número total de bijeções é $(k+1) \cdot k! = (k+1)!$, concluindo assim a prova do teorema.

O fatorial é fundamental no binômio de Newton. Para $m \geq n$ inteiros não nulos, definimos

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

Afirmamos que para m inteiro não negativo dado e n inteiro tal $m \geq n$, tem-se que $\binom{m}{n}$ é um inteiro. A idéia da demonstração é usar indução sobre m. Se $m=1$, então as possibilidades para n são $n=0$ ou $n=1$, donde

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \frac{1!}{1!\cdot 1!} = 1 \in \mathbb{Z}.$$

Suponha que a afirmação seja verdadeira para m, vamos provar que também vale para $(m+1)$.

De fato, uma conta simples mostra que

$$\binom{m+1}{n} = \binom{m}{n-1} + \binom{m}{n}$$

Pela hipótese de indução, as parcelas $\binom{m}{n-1}$ e $\binom{m}{n}$ são inteiros, donde $\binom{m+1}{n}$ é inteiro. Isto termina a prova do teorema.

Agora estamos prontos para apresentar o teorema do binômio de Newton. Embora o resultado seja válido para $a,b \in \mathbb{R}$ vamos enunciá-lo apenas para o caso $a,b \in \mathbb{Z}$.

Teorema 2 (Binômio de Newton) Dados inteiros a e b e um natural n, tem-se

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i.$$

Demonstração: A igualdade é claramente verdadeira para $n=1$. Suponha que a afirmação seja verdadeira para n e vamos provar que também é verdadeira para $(n+1)$. Como

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = a\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i + b\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n+1-i} b^i + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^{i+1}.$$

A primeira soma pode ser escrita como

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n+1-i} b^i = a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a^{n+1-i} b^i.$$

A segunda soma pode ser escrita como

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^{i+1}=b^{n+1}+\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}a^{n-i}b^{i+1}$$
$$=b^{n+1}+\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i-1}a^{n+1-i}b^{i}.$$

Assim, temos que

$$(a+b)^{n+1}=a^{n+1}+b^{n+1}+\sum_{i=1}^{n}\left[\binom{n}{i}+\binom{n}{i-1}\right]a^{n+1-i}b^{i}$$
$$=a^{n+1}+b^{n+1}+\sum_{i=1}^{n}\binom{n+1}{i}a^{n+1-i}b^{i}$$
$$=\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}a^{n-i}b^{i}.$$

Concluindo desse modo a prova do teorema.

Algumas propriedades importantes decorrem do Binômio de Newton. Vejamos algumas imediatas.

- Tomando $a=b=1$ no binômio de Newton obtemos que

$$2^{n}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}.$$

- Tomando $a=-b=1$ no binômio de Newton obtemos que

$$0=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}\binom{n}{i}.$$

Um resultado importante que decorre do binômio de Newton é a desigualdade de Bernoulli.

Teorema 3 (Desigualdade de Bernoulli) Se $x\geq -1$ e n natural, então vale a seguinte desigualdade

$$(1+x)^{n}\geq 1+nx\,.$$

Demonstração: A prova pode ser feita por indução sobre n. Notemos que a desigualdade se verifica claramente quando $n=1$. Por outro lado,

$$(1+x)^{n+1}=(1+x)^{n}\underbrace{(1+x)}_{\geq 0}\geq(1+nx)(1+x)=1+(1+n)x+x^{2}n\geq 1+(n+1)x\,.$$