Universidade Estadual de Maringá - Departamento de Matemática
Cálculo Diferencial e Integral: um KIT de Sobrevivência

Transformada de Laplace

Prof. Doherty Andrade
Universidade Estadual de Maringá
Departamento de Matemática - 87020-900 Maringá-PR, Brazil

Sumário

Resumo: Estas notas foram especialmente elaboradas para servirem de texto para o mini-curso sobre Transformada de Laplace. Este mini-curso é introdutório e exige-se o mínimo de pré-requisitos.

Acompanham estas notas um diskete contendo arquivos em **Maple** com os exemplos e outras atividades para serem realizadas no computador.

1. Preliminares

Nesta seção vamos ver alguns conceitos elementares que serão úteis no restante da teoria.

Um espaço métrico é um par (M, d), onde M é um conjunto não vazio e d uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$ que para todos os pontos x e y de M satisfaz:

a) $d(x, y) \geq 0$, (positiva)

b) $d(x, y) = 0 \iff x = y$, (não degenerada)

c) $d(x, y) = d(y, x)$, (simétrica)

d) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (desig. triangular).

A função d é chamada uma *métrica* e $d(x, y)$ significa a distância entre x e y.

O espaço métrico que temos de imediato e mais interessante é o $\mathbb{R}^n$, cuja métrica $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dada por $d(x, y) = \|x - y\|$, onde

$$\|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y\rangle}.$$

Esta é, por razões óbvias, chamada métrica euclidiana.

Pode-se provar que em $\mathbb{R}^n$ todas as métricas são equivalentes, isto é, duas métricas d_1 e d_2 sobre $\mathbb{R}^n$ quaisque satisfazem

$$d_1(x, y) \leq c_1 d_2(x, y) \leq c_2 d_1(x, y),$$

para quaisquer x, y.

Teorema 1..1 (Cauchy-Schwarz) *Se $x, y \in \mathbb{R}^n$ então*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

Teorema 1..2 (Desig. triangular) *Se $x, y \in \mathbb{R}^n$ então*

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Corolário 1..3 *Se $x, y \in \mathbb{R}^n$ então*

$$\|x - y\| \geq \|x\| - \|y\|.$$

Teorema 1..4 (Teorema de Pitágoras) *Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$. Então x e y são ortogonais se, e somente se,*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Uma *norma* sobre espaço veotrial V é uma função $n : V \to \mathbb{K}$, satisfazendo, onde $n(x)$ é denotado por $\|x\|$:

a) $\|x\| \geq 0$,
b) $\|x\| = 0 \iff x = 0$,
c) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$,
d) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, (desig. triangular),
para todos $x, y \in V$ e todos os escalares α.

Um espaço normado é um espaço vetorial munido de uma norma.

Neste ponto é interessante certificar-se de que o $\mathbb{R}^n$ é um espaço normado.

Em geral, num espaço vetorial normado $(X, \|\cdot\|)$, definimos $d : X \times X \to \mathbb{R}$ por

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

temos que (X, d) é um espaço métrico.

Uma sequência em um espaço métrico M é uma função $x : \mathbb{N} \to M$. É comum representar $x(n)$ por x_n e uma tal sequência é representada por (x_n).

Seja (x_n) uma sequência sobre um espaço métrico (M, d). Dizemos que a sequência (x_n) converge para $x_0 \in M$ se, dado $\epsilon > 0$, existe n_0 natural tal que $d(x_n, x_0) < \epsilon$ para todo $n > n_0$.

Seja (x_n) uma sequência sobre um espaço métrico (M, d). Dizemos que a sequência (x_n) é sequência de Cauchy se se dado $\epsilon > 0$, existe n_0 natural tal que $d(x_n, x_m) < \epsilon$ para todo $m, n > n_0$.

É fácil ver que toda sequência convergente é de Cauchy. Mas, em geral, nem toda sequência de Cauchy é convergente.

Um espaço métrico (M, d) é chamado de *completo* se suas sequências de Cauchy são convergentes em M.

Os exemplos mais comuns de espaços métricos completos são $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$.

Num espaço métrico M um subconjunto X é aberto se todos os seus pontos sao interiores. X é fechado se o complementar $M - X$ é aberto.

Num espaço métrico, podemos tomar a coleção de todos os conjuntos abertos $\mathcal{A}$. A coleção $\mathcal{A}$ possui uma estrutura, quase independente da métrica do espaço, caracterizada pelo teorema:

Teorema 1..5 *Num espaço métrico (M, d):*
1i) os conjuntos $\emptyset$ e M estão em $\mathcal{A}$, isto é, são abertos.
2i) a união S de qualquer coleção de conjuntos abertos é conjunto aberto.
3i) a interseção I de toda coleção finita de conjuntos abertos é aberto.

Observação 1..6 *O teorema 1..5 descreve de certa forma uma estrutura particular no conjunto dos abertos de um espaço métrico. Esta estrutura é a mais importante do assunto que estamos tratando.*

Teorema 1..7 *Num espaço métrico (M,d) um subconjunto X é aberto se, e somente se, é reunião de bolas abertas.*

Demonstração: É claro que qualquer reunião de bolas abertas é um conjunto aberto em virtude do teorema acima. Segue que se $X = \cup B_\lambda$, onde B_λ é bola aberta, então X é conjunto aberto. Se X é um conjunto aberto, então para cada $x \in X$ existe uma bola aberta B_x centrada em x inteiramente contida em X. Logo, $\{x\} \subset B_x \subset X$. Logo, tomando a reunião temos

$$X = \bigcup_{x \in X} \{x\} \subset \bigcup B_x \subset X.$$

Em relação a coleção de todos os subconjuntos fechados temos uma estrutura similar a da coleção dos abertos dada pelo teorema 1..5

Teorema 1..8 *Num espaço métrico (M,d) valem as seguintes propriedades:*

1i) Os conjuntos $\emptyset$ e M são fechados,

2i) A interseção de qualquer coleção $(F_\alpha), \alpha \in I$ de fechados é um conjunto fechado,

3i) A reunião de qualquer coleção finita $\{F_1, \ldots, F_n\}$ de conjuntos fechados é fechado.

Demonstração: 1i) Os conjuntos $\emptyset$ e M são fechados pois seus complementares são abertos.
2i) O conjunto interseção é fechado porque o seu complementar

$$M - (\bigcap_\alpha F_\alpha) = \bigcup_\alpha (M - F_\alpha)$$

é aberto pelo teorema 1..5
3i) O conjunto reunião é fechado porque o seu complementar

$$M - (\bigcup_{i=1}^{n} F_i) = \bigcap_{i=1}^{n} (M - F_i)$$

é aberto pelo teorema 1..5. □

Vimos que a reunião de uma coleção arbitrária de conjuntos abertos num espaço métrico é um conjunto aberto, e que a intersecção de uma coleção finita de abertos num espaço métrico é um conjunto aberto. Isto sugere a seguinte noção.

Definição 1..9 *Uma topologia sobre um conjunto X é uma coleção $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X tendo as seguintes propriedades:*

1i) $\emptyset$ e X estão em $\mathcal{T}$.

2i) a união de elementos de qualquer subcoleção de $\mathcal{T}$ está em $\mathcal{T}$.

3i) a intersecção de elementos de qualquer subcoleção finita de $\mathcal{T}$ está em $\mathcal{T}$.

O par $(X, \mathcal{T})$ é chamado de espaço topológico.

Se $\mathcal{T}$ é uma topologia em X e $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$ então $\mathcal{U}$ é chamado de conjunto aberto em X.

Exemplo 1..10 *Um espaço métrico (M, d) é um espaço topológico. A topologia de M é a topologia*

$$\tau = \{A \subseteq M; A \text{ é aberto de } M\},$$

onde o termo aberto está dado na definição. Esta estrutura é chamada de topologia gerada *pela métrica de (M, d).*

Definição 1..11 *Sejam τ e τ' topologias de X. Se $\tau' \supset \tau$, então dizemos que τ' é mais fina que τ. Também dizemos que τ' é maior do que τ.*

Duas topologias sobre um conjunto X não precisam ser comparáveis.

Teorema 1..12 *Num espaço topológico (X, τ) valem as seguintes propriedades:*
1i) Os conjuntos $\emptyset$ e X são fechados.
2i) A interseção de qualquer coleção de fechados é um conjunto fechado.
3i) A reunião de qualquer coleção finita de conjuntos fechados é fechado.

2. Funções Contínuas

O conceito de função contínua é fundamental em matemática. Neste capítulo vamos formular uma definição de continuidade que, embora envolva apenas a noção de conjunto aberto, engloba a noção de continuidade na reta real como caso especial.

Definição 2..1 *Sejam (X, τ) e (Y, τ') espaços topológicos. Uma função $f : X \to Y$ é dita contínua se para cada aberto V de Y, o subconjunto $f^{-1}(V)$ é aberto de X.*

Note que a noção de continuidade envolve apenas o conceito de conjunto aberto.

Teorema 2..2 (construção de funções contínuas) *Seja X, Y e Z espaços topológicos.*
a) Se $f : X \to Y$ é função constante, então f é contínua.
b) Se A é subespaço de X, então a inclusão $j : A \to X$ é contínua.
c) Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ são contínuas, então $g \circ f$ é contínua.
d) Se $f : X \to Y$ é contínua e A é subespaço de X, então a restrição $f|_A : A \to Y$ é contínua.

Demonstração: a) Suponha $f(x) \equiv a \in Y$. Se V é um aberto de Y, então $f^{-1}(V)$ é igual a X ou igual ao conjunto vazio, conforme $a \in V$ ou não. Em qualquer caso $f^{-1}(V)$ é aberto.
b) Dado aberto U em X, então $j^{-1}(U) = U \cap A$, que é aberto em A.
c) Dado aberto W em Z, então $g^{-1}(W)$ é aberto em Y e $f^{-1}(g^{-1}(W))$ é aberto em X. Mas $f^{-1}(g^{-1}(W)) = (g \circ f)^{-1}(W)$. Logo, $(g \circ f)^{-1}(W)$ é aberto em X e assim $(g \circ f)$ é contínua.
d) Finalmente para provar d) basta notar que $f|_A$ é igual a composta da inclusão $j : A \to X$ com $f : X \to Y$ e portanto $f|_A$ é contínua. $\square$

Teorema 2..3 *Sejam $X = A \cup B$, $f : A \to Y$ e $g : B \to Y$ contínuas tais que $f(x) = g(x), \forall x \in (A \cap B)$. Então é contínua a função $h : X \to Y$ dada por*

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & se\, x \in A \\ g(x), & se\, x \in B. \end{cases}$$

Teorema 2..4 *Seja $f : Z \to X \times Y$ dada por $f(a) = (f_1(a), f_2(a))$. Então, f é contínua se, e somente se, f_1 e f_2 são contínuas.*

Teorema 2..5 *Sejam (X, d_1) e (Y, d_2) espaços métricos. A função $f : X \to Y$ é contínua se, e somente se, para todo $x \in X$ e $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d_1(x, y) < \delta$ implica $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$.*

Demonstração: Primeiramente suponhamos f contínua e sejam dados $x \in X$ e $\varepsilon > 0$. Como f é contínua, $f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$ é aberto de X e contém x. Logo, contém alguma bola $B(x, \delta)$ centrada em x. Se $y \in B(x, \delta)$ então $f(y) \in B(f(x), \varepsilon))$. Isto é, $d_1(x, y) < \delta$ implica que $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Suponha agora que a condição seja satisfeita. Tomemos um aberto V de Y e $x \in f^{-1}(V)$. Como $f(x) \in V$ existe $B(f(x), \varepsilon) \subset V$. Logo, pela hipótese, existe $B(x, \delta)$ tal que $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$. Segue que $f^{-1}(V)$ é aberto em X. $\square$

Exemplo 2..6 *Se (M_1, d_1) e (M_2, d_2) são dois espaços métricos podemos introduzir pelo menos duas métricas em $M_1 \times M_2$. São elas dadas por se $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ são elementos de $M_1 \times M_2$*

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sqrt{(d_1(x_1,y_1))^2 + (d_2(x_2,y_2))^2} \\ m(x,y) &= \max\{d_1(x_1,y_1), d_2(x_2,y_2)\}. \end{aligned}$$

Estas métricas geram a mesma topologia em $M_1 \times M_2$ que tornam as projeções $\pi_1 : M_1 \times M_2 \to M_1$ e $\pi_2 : M_1 \times M_2 \to M_2$ dadas por $\pi_1(x_1, y_1) = x_1$ e $\pi_2(x_1, y_1) = y_1$, contínuas.

Uma *sequência* em um espaço topológico é uma função $s : \mathbb{N} \to X$. Denotamos $s(n)$ por x_n e escrevemos (x_n) ou $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ para representar s.

Dizemos que a sequência (x_n) de elementos de X *converge* para $x \in X$, se para todo aberto U contendo x existe um natural n_0 tal que $x_n \in U$, $\forall n \geq n_0$. Escrevemos $x_n \to x$ para representar que (x_n) converge para x.

Lema 2..7 *Seja (X, d) espaço métrico e $A \subset X$. Se existe sequência (x_n) de pontos de A convergindo para x, então $x \in \overline{A}$.*

Demonstração: Seja (x_n) sequência de pontos de A tal que $x_n \to x$. Então, todo aberto U contendo x contém pontos de A e assim $x \in \overline{A}$. Suponha que $x \in \overline{A}$, então para cada $n \in \mathbb{N}$ tomemos $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$. Provaremos que (x_n) converge para x. Dado um aberto U contendo x existe $B(x, \varepsilon) \subset U$. Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$, então $x_n \in U$ para todo $n \geq n_0$. $\square$

Note que apenas na prova da recíproca utilizamos o fato de X ser métrico.

Teorema 2..8 *Sejam (X, d) espaço métrico, Y espaço topológico e $f : X \to Y$ uma função. Então, f é contínua se, se somente se, para toda sequência convergente $x_n \to x$ em X tem-se $f(x_n) \to f(x)$.*

Demonstração: Primeiramente assuma que f seja contínua. Dado $x_n \to x$ e V aberto contendo $f(x)$, então $f^{-1}(V)$ é aberto contendo x e assim existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in f^{-1}(V)$, $\forall n \geq n_0$. Segue que $f(x_n) \in V$, $\forall n \geq n_0$ e assim $f(x_n) \to f(x)$.

Reciprocamnte, seja $A \subset X$ e $x \in \overline{A}$. Então, existe (x_n) sequência de pontos de A convergindo para x. Por hipótese, a sequência $f(x_n)$ converge para $f(x)$. Como $f(x_n) \in f(A)$, o lema anterior assegura que $f(x) \in \overline{f(A)}$. Logo, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ e f é contínua. $\square$

Lema 2..9 *As operações adição, subtração e multiplicação são funções contínuas de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. A operação de divisão é função contínua de $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{0\})$ em $\mathbb{R}$.*

Teorema 2..10 *Seja X espaço topológico e $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções contínuas. Então, $(f \pm g)$ e $(f \cdot g)$ são contínuas. Se $g(x) \neq 0$ para todo $x \in X$, então $(\frac{f}{g})$ é contínua.*

Demonstração: Como $(f + g)$ é a composta de $h : X \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, dada por $h(x) = (f(x), g(x))$, com a adição $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e ambas são contínuas segue que $(f + g)$ é contínua. Argumento análogo para as outras funções. □

3. Teoremas de Ponto Fixo

Se um conjunto é levado em si mesmo por uma função f, pode acontecer que algum ponto seja mantido fixo pela função. Um ponto x satisfazendo $f(x) = x$ é chamado ponto fixo da aplicação f.

O seguinte teorema é um resultado simples sobre existência de ponto fixo.

Teorema 3..1 *Toda aplicação contínua $f : [a, b] \to [a, b]$ tem pelo menos um ponto fixo.*

Demonstração: Defina a seguinte aplicação $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(x) - x$. Assim, g mede a distância orientada entre x e sua imagem $f(x)$. Um ponto fixo de f é um ponto x onde $g(x) = 0$. Se um dos extremos do intervalo é ponto fixo nada temos a provar. Então suponha que nenhum deles seja ponto fixo. Como $f(a)$ e $f(b)$ estão no intervalo $[a, b]$ segue que $a < f(a)$ e $f(b) < b$ e portanto $g(a) > 0$ e $g(b) < 0$. Como g é contínua, existe $x \in [a, b]$ tal que $g(x) = 0$. □

Um dos teoremas mais importantes sobre ponto fixo é o teorema do ponto fixo de Banach ou o princípio da contração. Sejam (M, d) e (N, d_1) dois espaços métricos. Uma aplicação $f : M \to N$ é dita uma *contração* se existe $0 \leq k < 1$ tal que

$$d_1(f(x), f(y)) \leq kd(x, y), \ \forall x, y \in M.$$

É fácil ver que toda contração é uniformemente contínua.

Teorema 3..2 (Teorema do Ponto fixo de Banach) *Sejam (M, d) um espaço métrico completo e $f : M \to M$ uma contração. Então, f possui um único ponto fixo em M. Além disso, dado $x_0 \in M$ a sequência definida por*

$$x_1 = f(x_0), \;\; x_{n+1} = f(x_n), \;\; n \in \mathbb{N} \tag{3.1}$$

é uma sequência convergente e $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ é ponto fixo de f.

Demonstração: se a sequência (x_n) definida acima converge para $a \in M$, então como f é contínua temos

$$f(a) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = a.$$

Provando que a é ponto fixo de f.

Se f tem dois pontos fixos a e b, então temos

$$d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq kd(a, b),$$

o que é absurdo a menos que $a = b$. Logo, $a = b$.

Resta provar que a sequência (x_n) converge. Notemos que $d(x_1, x_2) \leq kd(x_0, x_1)$ e que em geral $d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0), \forall n \in \mathbb{N}$. Segue que para $n, p \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq [k^n + k^{n+1} + \cdots + k^{n+p-1}] d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Como $\lim k^n = 0$ segue que a sequência é de Cauchy e portanto convergente, o que completa a prova do teorema. □

Exemplo 3..3 *Seja $f : [a, b] \to [a, b]$ uma aplicação contínua com derivada tal que $\sup_{x\in[a,b]} |f'(x)| < 1$. Então, f é uma contração.*

Este resultado decorre da seguinte desiguadade

$$|f(y) - f(x)| \leq |y - x| \sup_{c\in(a,b)} |f'(c)| \leq k|y - x|.$$

4. Introdução as EDO's

Esta seção é dedicada ao estudo de problemas de Cauchy

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0,$$

onde a função f é admitida ser contínua sobre seu domínio de definição.

Equações diferenciais ordinárias são importantes em muitos problemas encontrados quando modelamos fenômenos físicos ou biológicos. Vamos ver mais adiante alguns exemplos que ilustram esta importância.

Uma equação diferencial ordinária, ou simplesmente uma EDO, é uma equação

$$F(x, y, y', y^{(2)}, \dots, y^{(n)}) = 0, \tag{4.1}$$

envolvendo derivadas de uma função $y(x)$ que desejamos determinar.

A ordem de uma EDO é a ordem da mais alta derivada que aparece na equação.

Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^{n+1}$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, uma função definida e contínua em Ω. A equação diferencial ordinária de ordem 1, que estamos interessados, é uma equação do tipo

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), \tag{4.2}$$

satisfazendo à seguinte condição inicial $x(t_0) = x_0$

Dada $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ definida sobre um aberto I e de classe C^1 neste intervalo, se estiver verificada a condição (4.2), isto é,

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = f(t, \varphi(t)), \tag{4.3}$$

e $\varphi(t_0) = x_0$ dizemos que φ é uma solução de (4.2).

Se $n > 1$, (4.2) é de fato um sistema de equações diferenciais ordinárias, pois $f = (f^1, f^2, \dots, f^n)$ onde f^i são funções reais e contínuas definidas em Ω:

$$f^i : \Omega \to \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

A ordem da equação

$$u''' + x^2 u^5 u' - \sin(x) = 0$$

é três. Note que esta equação é não linear.

A equação geral (linear) de ordem k é do tipo

$$u^{(k)} + p_1(x) u^{(k-1)} + \dots + p_k(x) u = f(x). \tag{4.4}$$

Quando $f(x) \equiv 0$ em (4.4) dizemos que a EDO é homogênea.

Suponha que sejam dados k números reais fixados $b_1, b_2, \dots, b_k$. Então a EDO de ordem k juntamente com as condições

$$u^{(k)} + p_1(x) u^{(k-1)} + \dots + p_k(x) u = f(x) \tag{4.5}$$

$$u(x_0) = b_1, u'(x_0) = b_2, \dots, u^{(k-1)}(x_0) = b_k. \tag{4.6}$$

é chamado de problema de valor inicial.

Note que x_0 é o valor da variável independente em que todas as condições iniciais são impostas e que existem tantas condições iniciais quanto é a ordem da EDO. Se condições são dadas em mais que um valor de x, resulta num problema de fronteira. É claro que uma combinação dos dois resulta num problema de valor inicial e fronteira.

Uma das três questões fundamentais no estudo das equações diferenciais ordinárias é a determinação de suas soluções. Existem muitos métodos para determinação **explícita** de soluções, mas estes métodos não são gerais e determinam as soluções apenas de alguns tipos muito particulares de EDO's. A maior parte das EDO's não pode ser resolvida explicitamente. Já que a forma explícita da solução de uma EDO pode não existir, outra grande questão que surge é o estudo das propriedades das soluções (sem conhecê-las), é a **teoria qualitativa**. Esta parte da teoria das EDO's estuda o comportamento das soluções e propriedades geométricas.

Uma terceira questão importante trata da existência e unicidade de soluções das EDO's. Saber da existência de soluções é o primeiro passo no estudo das EDO's, se existe podemos procurar determiná-la ou uma aproximação para ela. O resultado mais importane e básico da teoria das EDO's é o Teorema 5..1 de existência e unicidade. Antes mais alguns comentários.

Muitas vezes não é possível escrever a EDO (4.1) da forma

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

Esta é uma situação particular que merece uma definição.

A EDO (4.1) é chamada linear se F é linear na variáveis $y, y', y^{(2)}, \ldots, y^{(n)}$. Deste modo uma EDO linear geral de ordem n é uma expressão do tipo

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x). \tag{4.7}$$

Para começar o nosso estudo vamos considerar primeiramente as EDO's lineares de primeira odem. Isto é, EDO's do tipo

$$y' + p(x)y = g(x).$$

Antes de avançarmos precisamos duas novas noções. Para ilustrar, consideremos a EDO $y'' + y = 0$ que admite solução dada por $y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$, em que c_1 e c_2 são constantes arbitrárias, tendo então a EDO acima infinitas soluções. Para determinar de modo único a solução, precisamos determinar as constantes e para isto precisamos mais informações sobre a solução. Há duas formas de fazer isto.

Dando condições iniciais que a solução deve satisfazer num ponto. Neste caso temos um problema de valor inicial (PVI). Por exemplo:

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0, \;\; y'(0) = 1. \end{cases}$$

Aqui a solução é $y(x) = \sin(x)$.
Ou, dando condições de fronteira que a solução deve satisfazer na fronteira de um conjunto. Neste caso temos um problema de valor de fronteira (PVF). Por exemplo:

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 1, \;\; y(\pi) = -1. \end{cases}$$

Aqui a solução é $y(x) = \cos(x)$.

Alguns métodos importantes de solução de EDO's se baseiam no tipo de problema PVI ou PVF.

5. Prova do Teorema de Existência

Vamos dar a prova do teorema de existência e unicidade de soluções de EDO's numa situação particular.

Teorema 5..1 (Existência e Unicidade) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ função contínua com $f_y : \Omega \to \mathbb{R}$ também contínua. Dado $(t_0, y_0) \in \Omega$, existe um intervalo aberto $I \ni t_0$ e uma única função diferenciável $\varphi : I \to \mathbb{R}$ com $(t, \varphi(t)) \in \Omega$, para todo $t \in I$, que é solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y\prime(t) = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{5.1}$$

Demonstração: A função $\varphi : I \to \mathbb{R}$ é solução de (5.1) se e somente se, for solução da equação integral

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds, \;\; \forall t \in I. \tag{5.2}$$

Assim, vamos estudar detalhadamente a equação (5.2). Sejam a e b reais positivos tal que o retângulo

$$R = \{(t, y); |t - t_0| \leq a \text{ e } |y - y_0| \leq b\}$$

esteja inteiramente contido em Ω. Como f é contínua e R é compacto, então f é limitada em R, seja

$$M = \max\{|f(t, y)|; (t, y) \in R\}.$$

Tome
$$0 < \overline{a} \leq \min\{a, \frac{b}{M}\}$$
e o intervalo
$$J_{\overline{a}} = [t_0 - \overline{a}, t_0 + \overline{a}].$$

Seja
$$\mathcal{C} = \{g; g : J_{\overline{a}} \to \mathbb{R} \text{ contínua}, g(t_0) = y_0 \text{ e } |g(t) - y_0| \leq b\}.$$
Munimos $\mathcal{C}$ da seguinte métrica
$$d(g_1, g_2) = \max\{|g_1(t) - g_2(t)|; t \in J_{\overline{a}}\}.$$
Segue que $(\mathcal{C}, d)$ é um espaço métrico. Mais ainda, $(\mathcal{C}, d)$ é um espaço métrico completo, isto é, toda sequência de Cauchy é convergente.

De (5.2) observamos que toda solução deve ser ponto fixo da aplicação dada por $\mathcal{C} \ni g \mapsto \Phi(g)$ onde
$$\Phi(g)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, g(s))ds. \tag{5.3}$$

É fácil ver que $\Phi(g)$ é contínua em $J_{\overline{a}}$ e $\Phi(g)(t_0) = y_0$. Além disso,
$$|\Phi(g)(t) - y_0| \leq |\int_{t_0}^{t} f(s, g(s))ds| \leq M|t - t_0| \leq M\overline{a} \leq b$$
e portanto $\Phi(g) \in \mathcal{C}$. Logo temos que
$$\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}.$$

Por outro lado, se g_1 e g_2 pertencem a $\mathcal{C}$ temos que
$$|\Phi(g_1)(t) - \Phi(g_2)(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s, g_1(s)) - f(s, g_2(s))|ds.$$
Como f é Lipschitiziana na variável y, existe uma constante positiva k tal que
$$|\Phi(g_1)(t) - \Phi(g_2)(t)| \leq \int_{t_0}^{t} k|g_1(s) - g_2(s)|ds \leq k\overline{a}d(g_1, g_2).$$
Segue que
$$d(\Phi(g_1), \Phi(g_2)) \leq k\overline{a}d(g_1, g_2).$$
Tomando $\overline{a}$ tal que $k\overline{a} < 1$ concluímos que Φ é uma contração. Pelo Teorema da contração, Φ tem um único ponto fixo e o teorema fica provado com $I = (t_0 - \overline{a}, t_0 + \overline{a})$. $\square$

Agora vamos provar que se duas soluções φ e ψ coincidem em algum ponto $t = t_0$ então elas coincidirão em todos os valores de t em que estiveram definidas.

Teorema 5..2 *Sejam φ e ϕ soluções de (5.1), definidas em intervalos I_1 e I_2, respectivamente. Suponha $t_0 \in I_1 \cap I_2$ que e $\varphi(t_0) = \phi(t_0) = x_0$. Então, φ e ϕ coincidem em todos os valores de $t \in I_1 \cap I_2$.*

Demonstração: Sejam $x = \varphi(t)$ e $y = \phi(t)$ duas soluções satisfazendo

$$\varphi(t_0) = \phi(t_0) = x_0.$$

Seja $J = (r_1, r_2) = I_1 \cap I_2$ o intervalo em que φ e ϕ estão definidas. Seja

$$N = \{t; t \in J \quad \text{e} \quad \varphi(t) = \phi(t).\}.$$

Note que N é não vazio, pois $t_0 \in N$. Mostraremos que N é aberto e fechado em J e como J é conexo teremos que $J = N$.

Seja (t_n) uma sequência de elementos de N convergente para $t \in J$. Assim, $\varphi(t_n) = \phi(t_n)$. Como φ e ϕ são contínuas temos que $\varphi(t) = \phi(t)$, segue que $t \in N$. Logo, N é fechado em J.

Seja $t_1 \in N$. Então, temos que $\varphi(t_1) = \phi(t_1) = x_1$. Resolvendo o problema de valor inicial com o par (t_1, x_1), o Teorema de existência e unicidade nos dá $\overline{a}$ e b tal que $K\overline{a} < 1$. Podemos escolher, usando a continuidade de φ e ϕ, $\overline{a}$ tal que

$$\|\varphi(t) - \phi(t)\| \leq b,$$

com $|t - t_1| < \overline{a}$.

Como φ e ϕ são soluções temos que

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= x_1 + \int_{t_1}^{t} f(s, \varphi(s))ds, \\ \phi(t) &= x_1 + \int_{t_1}^{t} f(s, \phi(s))ds. \end{aligned}$$

Para $|t - t_1| < \overline{a}$ obtemos

$$\|\varphi(t) - \phi(t)\| \leq K \int_{t_1}^{t} \|\varphi(s) - \phi(s)\| ds \leq bK\overline{a}.$$

Voltando na desigualdade anterior obtemos

$$\|\varphi(t) - \phi(t)\| \leq b(K\overline{a})^2.$$

Repetindo o argumento, chegamos que

$$\|\varphi(t) - \phi(t)\| \leq b(K\overline{a})^n,$$

para todo $n \geq 1$. Como $K\overline{a} < 1$ obtemos que $\varphi(t) = \phi(t)$ para todo $|t - t_1| < \overline{a}$. Logo, existe uma vizinhança de t_1 onde $\varphi(t)$ e $\phi(t)$ coincidem, isto é, N é aberto. Como N é não vazio, aberto e fechado em J e J é conexo, segue que $N = J$. $\square$

Para o próximo resultado, que trata da contuidade da solução com os dados iniciais, vamos usar a seguinte notação, $u(t; t_0, y_0)$ denota a solução de (5.1) com $u(t_0) = y_0$.

Teorema 5..3 *Sob as mesmas hipóteses do teorema de existência, a solução $u(t; t_0, y_0)$ é função contínua de y_0 para t_0 e t fixos.*

Demonstração: Consideremos as seguintes aplicações

$$\begin{aligned} A_0x(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau, \\ A_1x(t) &= y_1 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau, \end{aligned}$$

cujos pontos fixos são as soluções com condições iniciais y_0 e y_1 num intervalo $[t_0, b]$. Podemos escolher $h < \overline{a}$ e considerar $J_h = [t_0, t_0 + h]$ intervalo fechado de modo que estas aplicações sejam contrações com mesma constante k. Se $d(y_0, y_1) \leq \varepsilon$ então as contrações são próximas e portanto a distância entre seus pontos fixos não excede $\dfrac{\varepsilon}{1-k}$. Segue que

$$\max\{d(u(t; t_0, y_0), u(t; t_1, y_1)),\ t \in J_h\} \leq \frac{\varepsilon}{1-k}.$$

Assim, duas soluções diferem no máximo por ε em $t = t_0$ e no máximo por $\dfrac{\varepsilon}{1-k}$ em todo o intervalo J_h.

Movendo o ponto inicial de t_0 para $t_1 = t_0 + h$ podemos estender a solução para o intervalo $[t_0, t_0 + 2h]$ e então repetir o argumento, Encontramos que as duas soluções diferem no máximo por $\dfrac{\varepsilon}{(1-k)^2}$.

Continuando este argumento, nós finalmente obtemos a seguinte estimativa

$$\max_{t_0 \leq t \leq b} \|u(t, t_0, u_0) - u(t, t_0, u_1)\| \leq \frac{\varepsilon}{(1-k)^m}, \tag{5.4}$$

onde

$$m = \left[\frac{b - t_0}{h}\right] + 1.$$

Assim, fazendo $\|u_0 - u\|$ suficientemente pequeno, podemos fazer o lado esquerdo de (5.4) tão pequeno quanto desejado. Isto prova a continuidade de $u(t, t_0, u_0)$. □

O teorema de existência de solução para equações diferenciais ordinárias garante a existência de solução numa vizinhança do ponto inicial t_0. A pergunta que surge naturalmente é: podemos estender esta solução para intervalos maiores? O seguinte resultado responde esta pergunta.

Se φ é uma solução do pvi definida num intervalo aberto I, dizemos que $\tilde{\varphi}$ é uma extensão de φ se $\tilde{\varphi}$ é solução do pvi, está definida em um intervalo aberto $\tilde{I}$ que contém propriamente I, e em I, $\tilde{\varphi}$ e φ coincidem. Se uma solução φ não admite uma extensão, dizemos que ela é uma solução maximal.

Teorema 5..4 *Sob as hipóteses do teorema de existência, temos que toda solução do problema (5.1) pode ser estendida a um intervalo maximal e este é aberto.*

Demonstração: Seja S o conjunto de todos as soluções φ_λ do (5.1) definidas em intervalos abertos $I_\lambda \ni t_0$. Seja $I = \cup I_\lambda$. Defina $\varphi : I \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(t) = \varphi_\lambda(t), \ \ t \in I_\lambda.$$

Notemos que I é aberto. Em em virtude do Teorema 5..2 φ está bem definida e além disso, φ é solução do PVI (5.1).

Suponha que $I = (\omega_-, \omega_+)$. Vamos provar que I é maximal, isto é, não existe um intervalo $\tilde{I}$ contendo propriamente I onde o PVI tenha solução $\tilde{\varphi}$. De fato, suponha que isto não seja verdade. Então este conteria uma das extremidades, digamos ω_+. Assim, o PVI dado por

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(w_+) = \tilde{\varphi}(w_+), \end{cases}$$

teria uma solução $\overline{\varphi}$ num aberto $(\omega_- - \overline{a}, \omega_+ + \overline{a})$. Segue que

$$\overline{\varphi} = \begin{cases} \varphi(t), t \in (\omega_-, \omega_+) \\ \tilde{\varphi}(t), t \in [\omega_+, \omega_+ + \overline{a}) \end{cases}$$

seria solução do PVI (5.1) no intervalo $\tilde{I}$ que contém propriamente I. Mas isto é um absurdo. □

6. Transformada $\mathcal{L}$ de Laplace

Nesta seção vamos usar o conceito de operador linear e seu inverso, na solução de problemas de valor inicial. A técnica da Transformada de Laplace[1] é uma poderosa ferramenta na determinação de soluções de equações diferenciais ordinárias com condições iniciais. O operador $\mathcal{L}$ é um operador integral (linear) que destrói derivadas, transformando edo's em simples equações algébricas.

Dizemos que f é contínua por partes em $[a, b]$ se é contínua exceto num número finito de pontos deste intervalo e se em cada ponto x_0 de descontinuidade existem os limites laterais a direita e a esquerda, isto é,

$$\lim_{h\to 0^+} f(x_0 + h) \quad \text{e} \quad \lim_{h\to 0^+} f(x_0 - h)^{2}, \text{ existem}$$

quando h tende a zero por valores positivos.

Seja $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ e consideremos

$$\int_0^\infty \exp(-st)f(t)dt, \tag{6.1}$$

onde s é uma variável real. Quando f é suficientemente bem comportada, que será feito preciso mais adiante, esta integral convergirá para certos valores de s, definindo uma função de s, chamada de *transformada de Laplace* de f, e será representada por $\mathcal{L}[f]$ ou $\mathcal{L}[f](s)$.

Como exemplo vamos determinar $\mathcal{L}[\cos(at)]$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\cos(at)] &= \int_0^\infty \exp(-st)\cos(at)dt \\
&= \lim_{to\to\infty} \int_0^{t_0} \exp(-st)\cos(at)dt \\
&= \lim_{t_0\to\infty} \left[\frac{\exp(-st_0)}{s^2+a^2}(a\sin(at_0) - s\cos(at_0)) + \frac{s}{s^2+a^2}\right] \\
&= \frac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0,
\end{aligned}$$

pois este limite existe se $s > 0$.

Observe que para (6.1) existir devemos exigir que f seja dominada por alguma exponencial, assim $\mathrm{e}^{-st}f(t)$ tende para zero rapidamente quando t cresce. Mais precisamente, vamos introduzir o seguinte conceito,

[1] Pierre Simon de Laplace (1749-1872), matemático francês com grandes contribuições a matemática, mecânica celeste e teoria das probabilidades

[2] apenas um destes limites tem sentido quando x_0 é extremo do intervalo.

Definição 6..1 *Dizemos que f é de ordem exponencial em $[0,\infty)$ se existem constantes $C > 0$ e α tais que*

$$|f(t)| \leq Ce^{\alpha t}, \quad \forall t > 0. \tag{6.2}$$

São exemplos de funções de ordem exponencial, $f(t) = C$ (constante) e

$$t^n, \ \mathrm{e}^{at}, \ \sin(bt), \ \cos(at), \ \mathrm{e}^{at}t^n\sin(bt), \ \mathrm{e}^{at}t^n\cos(bt).$$

Como consequência também são funções de ordem exponencial, os polinômios e os polinômios trigonométricos.

Para simplificar a linguagem, uma função de ordem exponencial satisfazendo (6.2) será chamada de função de ordem exponencial α.

Teorema 6..2 (Condições suficientes para a existência de $\mathcal{L}$) *Se f é contínua por partes e de ordem exponential, então existe um real α tal que*

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}f(t)dt,$$

converge para todos os valores de $s > \alpha$.

Demonstração: Como f é de ordem exponencial, exitem $C > 0$ e α reais tais que

$$|f(t)| \leq C\mathrm{e}^{\alpha t}.$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned} |\int_0^\infty \exp(-st)f(t)dt| &\leq C\int_0^\infty \exp(-s(-\alpha)t)dt \\ &= \lim_{t_0\to\infty} \frac{C}{s-\alpha}\left[1-\exp(-(s-\alpha)t_0)\right] \\ &= \frac{C}{s-\alpha}, \quad \text{se } \ s > \alpha. \end{aligned}$$

Logo, a transformada de Laplace de toda função de ordem exponencial existe, mas e a recíproca? Uma função cuja transformada de Laplace existe é necessariamente de ordem exponencial? A resposta é não, pois a função $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ tem transformada de Laplace dada por

$$\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{s^{3/2}}$$

embora não seja de ordem exponencial. Também, e^{t^2} não é função de ordem exponencial.

Assim, o conjunto das funções que possuem transformada de Laplace contém propriamente o conjunto $\mathcal{E}$ das funções contínuas por partes e de ordem exponencial. O conjunto $\mathcal{E}$ é o suficiente para a maioria das nossas aplicações.

7. Propriedades

Vamos representar por $\mathcal{E}$ o conjunto de todas as funções contínuas por partes e de ordem exponencial. Note que $\mathcal{E}$ munido das operações usuais de soma de funções e de multiplicação de escalar real por função, é um espaço vetorial real. Por $\mathcal{F}$ vamos representar o cojunto de todas as funções reais definidas em intervalos da forma (a_0, ∞) ou $[a_0, \infty)$, $a_0 \geq -\infty$. Em $\mathcal{F}$ adotamos a seguinte definição modificada de soma de funções: se f e g pertencem a $\mathcal{F}$ definimos $f+g$ como sendo a função cujo domínio é a interseção dos domínios de f e g, e cujo valor em qualquer ponto s da a interseção é $f(s)+g(s)$. Desta maneira segue que $\mathcal{L}$ é um operador linear entre $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$.

Vamos resumir este comentário com o seguinte resultado.

Teorema 7..1 (Linearidade $\mathcal{L}$) *Sejam f e g pertencentes a $\mathcal{E}$ e $k \in \mathbb{R}$. Então, $\mathcal{L}[k\,f + g](s) = k\,\mathcal{L}[f](s) + \mathcal{L}[g](s)$.*

Cuidado ao dizer que $\mathcal{L}$ é um operador linear. É preciso deixar bem claro esta noção, pois se considerarmos $f(t) = 1$ e $g(t) = -f(t)$), então $\mathcal{L}[f]+\mathcal{L}[g]$ é a função nula no intervalo $(0, \infty)$, enquanto $\mathcal{L}[f + g] = \mathcal{L}[0]$ é função nula no em $(-\infty, \infty)$. Assim, só podemos dizer que $\mathcal{L}[f + g]$ e $\mathcal{L}[f] + \mathcal{L}[g]$ são iguais para aqueles valores de s onde ambas as funções estão definidas. Esta dificuldade pode ser contornada se concordarmos que duas funções de $\mathcal{F}$ são idênticas quando elas coincidem em algum intervalo da forma (a, ∞).

Teorema 7..2 (Lerch) *Sejam f e g pertencentes a $\mathcal{E}$. Suponha que existe $s_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[g](s)$, $\forall s > s_0$. Então, $f(t) = g(t)$, $\forall t > 0$, exceto possivelmente nos pontos de descontinuidade.*

A demonstração será omitida. Observe que o teorema acima diz que $\mathcal{L}$ é injetora. $\square$

Teorema 7..3 (Comportamento assintótico de $\mathcal{L}[f]$) *Se $f \in \mathcal{E}$, então,*

$$\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}[f](s) = 0.$$

Demonstração: Como existem constantes $C > 0$ e α tais que

$$|\mathcal{L}[f](s)| \leq \frac{C}{s-\alpha}, \quad \forall s > \alpha,$$

o resultado segue imediatamente. □

Teorema 7..4 (Fórmulas Elementares) *Sejam* $f,\ g \in \mathcal{E}$ *e* $a \in \mathbb{R}$, *então*

	g	$\mathcal{L}[g]$
1	$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
2	$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
3	1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
4	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0,\ n \in \mathbb{N}$
5	$\exp(at)$	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$
6	f'	$s\mathcal{L}[f] - f(0^+)$, se , $f' \in \mathcal{E}$
6′	f''	$s^2\mathcal{L}[f] - sf(0^+) - f'(0^+)$, se , $f'' \in \mathcal{E}$
7	$\exp(at)f$	$\mathcal{L}[f](s-a)$, 1^0 deslocamento na variável s
8	$tf(t)$	$-\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f](s)$,
9	$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}[f](s)$,
10	$\int_0^t f(u)du$	$\frac{1}{s}\mathcal{L}[f](s)$,

Teorema 7..5 (1^0 teorema do deslocamento na variável s) *Seja f função contínua por partes e de ordem exponencial. Então,*

$$\mathcal{L}[e^{at}f] = \mathcal{L}[f](s-a)^3.$$

Demonstração: A demonstração é imediata e deixamos como exercício. □

Assim, podemos escrever imediatamente:

$f(t)$	$\mathcal{L}[f]$
$e^{at}t^n$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$e^{at}\cos(\omega t)$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at}\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$

[3] $\exp(-as)$ é chamado fator de retardamento

Para o próximo resultado precisamos da função degrau unitário $u_a(t)$ definida por

$$u_a(t) = \begin{cases} 0, \text{se } \ t \leq a \\ 1, \ \ \text{se } \ t > a. \end{cases}$$

A função degrau unitário é útil para escrever funções como esta

$$f(t) = \begin{cases} 0, \text{se } \ t \leq a \\ \sin(t-a), \ \ \text{se } \ t > a. \end{cases}$$

Com efeito, $f(t) = u_a(t)\sin(t-a)$.

É fácil determinar que

$$\mathcal{L}[u_a(t)] = \frac{\mathrm{e}^{-as}}{s}.$$

Teorema 7..6 (2^0 teorema do deslocamento) *Seja $f(t) = u_a(t)g(t-a), \ \ a \geq 0$, função contínua por partes e de ordem exponencial. Então,*

$$\mathcal{L}[f] = \exp(-as)\mathcal{L}[g].$$

Demonstração: É imediato e deixamos como exercício.

Teorema 7..7 (Mudança de Escala) *Seja f função contínua por partes e de ordem exponencial e $a \neq 0$. Então,*

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}\mathcal{L}[f](\frac{s}{a}).$$

Teorema 7..8 (Transformada de Laplace da derivada) *Seja $f'(t)$ é função contínua por partes e de ordem exponencial. Então,*

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f] - f(0+).$$

Demonstração: A prova decorre de uma integração por partes. De fato,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'(t)] &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f'(t)dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \mathrm{e}^{-st} f'(t)dt \\ &= \lim_{b\to\infty}\left[\mathrm{e}^{-st} f(t)\right]_0^b + s\int_0^b \mathrm{e}^{-st} f(t)dt \\ &= s\mathcal{L}[f](s) - f(0+). \end{aligned}$$

□

Corolário 7..9 *Se $f^{(n)}$ é contínua por partes e de ordem exponencial em $[0,\infty)$, então é fácil obter*

$$\mathcal{L}[f^{(n)}] = s^n\mathcal{L}[f] - s^{n-1}f(0^+) - s^{n-2}f'(0^+) - \cdots - f^{(n-1)}(0^+).$$

Demonstração: A prova segue por indução. □

Teorema 7..10 (Transformada de Laplace de integrais)

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)du\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f].$$

Demonstração: Se $G(t) = \int_0^t f(u)du$, então $G'(t) = f(t)$ e $G(0) = 0$. Logo,

$$\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[G'] = s\mathcal{L}[G] - G(0) = s\mathcal{L}[G],$$

e assim $\mathcal{L}[G] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f]$. □

Teorema 7..11 (Transformada de Laplace de funções periódicas) *Se f é ordem exponencial e de período p, então*

$$\mathcal{L}[f] = \frac{1}{1-\exp(-ps)}\int_0^p \exp(-st)f(t)dt.$$

Demonstração: Por definição e fazendo $x = t - np$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f] &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{np}^{(n+1)p}\exp(-st)f(t)dt\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\exp(-nps)\int_0^p \exp(-sx)f(x)dx\\
&= \frac{1}{1-\exp(-ps)}\int_0^p \exp(-sx)f(x)dx,
\end{aligned}$$

de onde segue o resultado. □

8. A Inversa da Transformada de Laplace

Na determinação da solução de uma EDO usando a transformada de Laplace devemos reconstruir a solução $y(t)$ conhecendo-se a sua transformada $Y(s) = \mathcal{L}(y)$. O operador que retorna $y(t)$ a partir de $\mathcal{L}(y)$ é a transformada inversa de Laplace. Escrevemos

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y) \quad \text{ou} \quad y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}(y)\right].$$

Observe que o Teorema 7..2, Teorema de Lerch, diz que a tranformação linear $\mathcal{L}(y)$ é injetora. Assim, se denotamos por $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ a sua imagem temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}: \ \mathcal{E} &\to \mathcal{L}(\mathcal{E}) \\ f &\mapsto \mathcal{L}(f) \end{aligned}$$

é inversível. Como a inversa de uma transformação linear é também linear, temos que $\mathcal{L}^{-1}$ é linear.

Assim temos o seguinte resultado,

Teorema 8..1 *Se $F = \mathcal{L}[f]$ e $G = \mathcal{L}[g]$, então, $\mathcal{L}^{-1}[k\,F + G](s) = k\,f + g$.*

A tabela da página 21 pode ser usada no cálculo de $\mathcal{L}^{-1}[F]$.

Exercício 8..2 *Calcule*

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s+3}{s^2-4s+20}\right].$$

sugestão: use frações parciais para decompor a expressão,

9. Frações Parciais

No trabalho com $\mathcal{L}$, em geral, nos deparamos com expressões racionais $F(s) = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$, onde $P(s)$ e $Q(s)$ são polinômios. Para determinar a inversa $\mathcal{L}^{-1}(F)$ é conveniente decompor F em frações o mais simples possível. Fazemos isto usando o método das frações parciais.

Como $F(s) \to 0$ quando $s \to \infty$, podemos considerar apenas o caso em que o grau de P é menor do que o grau de Q e sem fatores em comum.

Primeiro caso: Fatores Lineares Distintos:

Se $Q(s)$ só tem fatores lineares não repetidos, por exemplo,

$$Q(s) = (s - a_1)(s - a_2) \cdots (s - a_n),$$

então decompomos F em fraçoes do tipo

$$F(s) = \frac{A_1}{s - a_1} + \cdots + \frac{A_n}{s - a_n}.$$

Como exemplo, decomponha

$$F(s) = \frac{s^2 + 3s - 6}{s(s-1)(s-2)}.$$

Como o denominador só tem fatores lineares não repetidos

$$Q(s) = s(s-1)(s-2),$$

vamos determinar A, B e C tais que

$$\frac{s^2 + 3s - 6}{s(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s-2}.$$

Realizando uma conta simples, obtemos $A = -3$, $B = 2$ e $C = 2$. Logo, temos que

$$\frac{s^2 + 3s - 6}{s(s-1)(s-2)} = -\frac{3}{s} + \frac{3}{s-1} + \frac{2}{s-2}.$$

Segue que a determinação de $\mathcal{L}^{-1}(F)$ agora é mais fácil. De fato,

$$\mathcal{L}^{-1}(F)(s) = -3 + 2\exp(t) + 2\exp(2t).$$

Outro exemplo, decomponha

$$F(s) = \frac{1}{s^3 - s}.$$

Segundo caso: Fatores Lineares Repetidos: Se $Q(s)$ tem fatores lineares repetidos, a cada fator linear repetido $ax + b$ que aparece n vezes no denominador, corresponde uma soma de n frações parciais da forma

$$\frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax^+b)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(ax^+b)^n},$$

onde $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são constantes a serem determinadas.

Por simplicidade vamos supor que $Q(s)$ tem um único fator linear $(s-a)$ repetido $m = 2$ vezes, isto é, em $Q(s)$ aparece o fator $(s-a)^m$. Neste caso $Q(s)$ tem a forma

$$Q(s) = (s-a)^m (s-b_1)\cdots(s-b_n),$$

e então devemos procurar por constantes $A_1, A_2, B_1, \ldots, B_n$ tais que

$$F(s) = \frac{A_1}{s-a} + \frac{A_2}{(s-a)^2} + \frac{B_1}{s-b_1} + \cdots + \frac{B_n}{s-b_n}.$$

Se existem mais termos lineares repetidos devemos incluir termos como os dois primeiros da igualdade acima.

Como exemplo, decomponha

$$F(s) = \frac{s}{(s-1)^2}.$$

Como o denominador tem fatores lineares repetidos, $Q(s) = (s-1)^2$, vamos determinar A e B

$$\frac{s}{(s-1)^2} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2}.$$

Realizando uma conta simples, obtemos $A = B = 1$. Logo, temos que

$$\frac{s}{(s-1)^2} = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2}.$$

Segue que

$$\mathcal{L}^{-1}(F)(s) = t\exp(t) + \exp(t).$$

Outro exemplo, decomponha

$$F(s) = \frac{s^2-1}{(s-2)^2(s+3)}.$$

Terceiro caso: Fatores distintos do segundo grau: A cada fator do segundo grau irredutível ax^2+bx+c que aparece uma vez no denominador, corresponde uma fração parcial da forma

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c},$$

onde A, B e C são constantes a serem determinadas.

Quarto caso: Fatores repetidos de segundo grau: A cada fator do segundo grau irredutível $ax^2 + bx + c$ que aparece n vezes no denominador, corresponde uma soma de n frações parciais da forma

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n},$$

onde A_i, B_i são constantes a serem determinadas.

Na teoria da transformada de Laplace sempre é possível usar números complexos.

10. Teorema da Convolução

Uma questão que surge naturalmente é como expressar $\mathcal{L}^{-1}[FG]$. É isto que vamos tentar responder agora.

Dadas funções f e g, representamos a convolução entre elas por $f * g$ e definimos por

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)du.$$

Note que valem as seguintes propriedades de demonstração imediata:
(a)$f * g = g * f$
(b)$f * (g + h) = f * g + f * h$
(c)$f * (kg) = k(f * g), \ \forall k \in \mathbb{R}$
(d)$1 * f = \int_0^t f(u)du$
(e) $1 * f' = f(t) - f(0)du$

Teorema 10..1 (Teorema da Convolução) *Sejam f e g contínuas por partes e de ordem exponencial tais que $F(s) = \mathcal{L}[f]$ e $G(s) = \mathcal{L}[g]$. Então, vale a seguinte relação*

$$\mathcal{L}^{-1}[FG] = f * g.$$

Como exemplo,consideremos $F(s) = \frac{1}{s^2}$ e $G(s) = \frac{1}{s^2+1}$ e $Y(s) = F(s)G(s)$. Vamos determinar $y(t)$ tal que $\mathcal{L}[y] = Y$.

Notemos que $\mathcal{L}[t] = F$ e $\mathcal{L}[\sin(t)] = G$. Pelo teorema da convolução, temos que

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s^2+1}\right] \\ &= \int_0^t (t-u)\sin(u)du \\ &= -(t-u)\cos(u) - \sin(u)|_0^t \\ &= -\sin(t) + t. \end{aligned}$$

11. Aplicações a EDO's

Agora vamos utilizar as propriedades do operador $\mathcal{L}$ para obter soluções de algumas EDO's simples.
A- Considere o PVI dado por

$$\begin{aligned} &y'' - y = 1, \\ &y(0) = 0, \;\; y'(0) = 1. \end{aligned}$$

Aplicando $\mathcal{L}$ a equação obtemos

$$\mathcal{L}[y''] - \mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[1].$$

Usando o Teorema 7. obtemos

$$s^2\mathcal{L}[y] - 1 - \mathcal{L}[y] = \frac{1}{s}.$$

Logo,

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s(s-1)} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}.$$

Novamente usando o Teorema 7. temos que

$$\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[\exp(t)] - \mathcal{L}[1] = \mathcal{L}[\exp(t) - 1],$$

de onde segue que

$$y(t) = \exp(t) - 1.$$

B- Considere o PVI dado por

$$\begin{aligned} &y'' + y' - 2y = 4\exp(t) + 1, \\ &y(0) = 0, \;\; y'(0) = 0. \end{aligned}$$

Aplicando $\mathcal{L}$ dos dois lados da equação e usando as propriedade obtemos obtemos

$$\mathcal{L}[y] = \frac{s+1}{s^2+s-2} + \left(\frac{4}{s-1} + \frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{(s^2+s-2}\right).$$

Como $s^2 + s - 2 = (s+2)(s-1)$, podemos escrever

$$\mathcal{L}[y] = \frac{s+1}{(s+2)(s-1)} + \frac{4}{(s-1)^2(s+2)} + \frac{1}{s(s-1)(s+2)}.$$

Usando frações parciais, devemos determinar constantes A, B, C e D tais que

$$\frac{s+1}{(s+2)(s-1)} + \frac{4}{(s-1)^2(s+2)} + \frac{1}{s(s-1)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s-1)^2} + \frac{D}{s-1}.$$

Uma conta simples mostra que $A = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{17}{18}$, $C = \frac{4}{3}$ e $D = \frac{5}{9}$.

A Aplicando $\mathcal{L}^{-1}$, obtemos

$$y(t) = -\frac{1}{2} + \frac{17}{18}\exp(-2t) + \frac{4}{3}t\exp(t) + \frac{5}{9}\exp(t).$$

C- Considere o PVI dado por

$$\begin{aligned} &y'' + 4y' + 13y = 2t + 3\exp(-2t)\cos(3t),\\ &y(0) = 0, \;\; y'(0) = -1. \end{aligned}$$

Aplicando $\mathcal{L}$ dos dois lados da equação e usando as propriedade obtemos

$$\mathcal{L}[y] = -\frac{1}{s^2+4s+13} + \frac{2}{s^2(s^2+4s+13)} + \frac{3(s+2)}{(s^2+4s+13)^2}.$$

Aplicando frações parciais e $\mathcal{L}^{-1}$, obtemos

$$y(t) = -\frac{179}{507}\exp(-2t)\sin(3t) + \frac{8}{169}\exp(-2t)\cos(3t) + \frac{1}{2}t\exp(-2t)\sin(3t) + \frac{2}{13}t - \frac{8}{169}.$$

Exercício 11..1 *Resolva cada um dos PVI abaixo.*
1. $y'' - 3y' + 2y = 0, \;\; y(0) = 3, \;\; y'(0) = 4.$
2. $y'' + y = t, \;\; y(0) = -1, \;\; y'(0) = 3.$
3. $y'' + y' - y = 4\exp(t), \;\; y(0) = 1, \;\; y'(0) = 0.$
4. $2y'' + 50y = 100\sin(\omega t), \;\; y(0) = 0, \;\; y'(0) = 0.$
5. $y'' + 4y' + 8y = 0, \;\; y(0) = 2, \;\; y'(0) = 0.$

12. Métodos para determinar a transformada inversa de Laplace

Um dos métodos mais simples para determinar a transformada inversa de Laplace é usar o método das frações parciais juntamente com a tabela de valores da transformada de Laplace. Este foi o método utilizado até aqui.

Outro método muito útil é o método das séries de potências negativas. Se $F(s)$ tem um desenvolvimento em séries de potências negativas (cuidado! precisamos de condições adicionais) dado por

$$F(s) = \frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s^2} + \ldots + \frac{a_n}{s^{n+1}} + \ldots$$

então podemos inverter termo a termo para obter

$$f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n + \ldots.$$

Existe uma fórmula explícita para a transformação inversa de Laplace, mas ela envolve integração sobre um contorno no plano complexo, chamado de contorno de Bromwich.

A título de curiosidade apresentamos a sua expressão aqui:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \mathrm{e}^{st} F(s)\, ds, \;\; t > 0$$

e $F(t) = 0$ se $t < 0$. Esta integral deve ser calculada ao longo de uma reta $s = \gamma$ no plano complexo, onde $s = x + iy$. O número real γ deve ser escolhido de modo que $s = \gamma$ esteja à direita de todas as singularidades.

13. Aplicação a sistemas de EDO's

Como exemplo, vamos considerar o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias.

Resolva o seguinte sistema de EDO's

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = y - 2x, \\ x(0) = 8, y(0) = 3. \end{cases}$$

Se $\mathcal{L}[x] = X$ e $\mathcal{L}[y] = Y$, então tomando a transformada de Laplace nas duas equações e usando as condições iniciais, temos

$$\begin{aligned} sX - 8 &= 2X - 3Y \\ sY - 3 &= Y - 2X. \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema linear, obtemos

$$X = \frac{5}{s+1} + \frac{3}{s-4},$$

$$Y = \frac{5}{s+1} - \frac{2}{s-4}.$$

De onde segue que

$$x(t) = 5\exp(-t) + 3\exp(4t),$$

$$y(t) = 5\exp(-t) - 2\exp(4t).$$

Referências

[1] E. Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics.John wiley and Sons, Inc. New York, 1968

[2] M. R.Spiegel, Transformadas de Laplace. McGraw-Hill do Brasil, 1976.

Índice Remissivo