



Cálculo Diferencial e Integral: um KIT de sobrevivência

Prof. Doherty Andrade

Séries de Fourier – Convergência

Podemos usar o Maple para calcular os coeficientes de Fourier e ilustrar a convergência das séries de Fourier. Calculamos os coeficientes da série de Fourier de uma função de x definida sobre um intervalo de $-p$ a p usando o seguinte procedimento, onde f é a função, n o número de termos da série de Fourier e p é o período.

> **restart:**

> **acoeff:=(f,n,p)->(1/p)*evalf(Int(f(t)*cos(n*Pi*t/p),t=-p..p));**

$$acoeff := (f, n, p) \rightarrow \frac{\text{evalf} \left(\int_{-p}^p f(t) \cos \left(\frac{n \pi t}{p} \right) dt \right)}{p}$$

> **bcoeff:=(f,n,p)->(1/p)*evalf(Int(f(t)*sin(n*Pi*t/p),t=-p..p));**

$$bcoeff := (f, n, p) \rightarrow \frac{\text{evalf} \left(\int_{-p}^p f(t) \sin \left(\frac{n \pi t}{p} \right) dt \right)}{p}$$

> **fourierseries:=proc(f,n,p) local s,ii;**

> **s:=acoeff(f,0,p)/2:**

```

> for ii from 1 to n do
s:=s+acoeff(f,ii,p)*cos(ii*Pi*x/p)+bcoeff(f,ii,p)*sin(ii*Pi*x/p) od:

> s;

> end:

> f:=x->x^2;

```

$$f: x \rightarrow x^2$$

```

> s:=fourierseries (f,20,Pi);

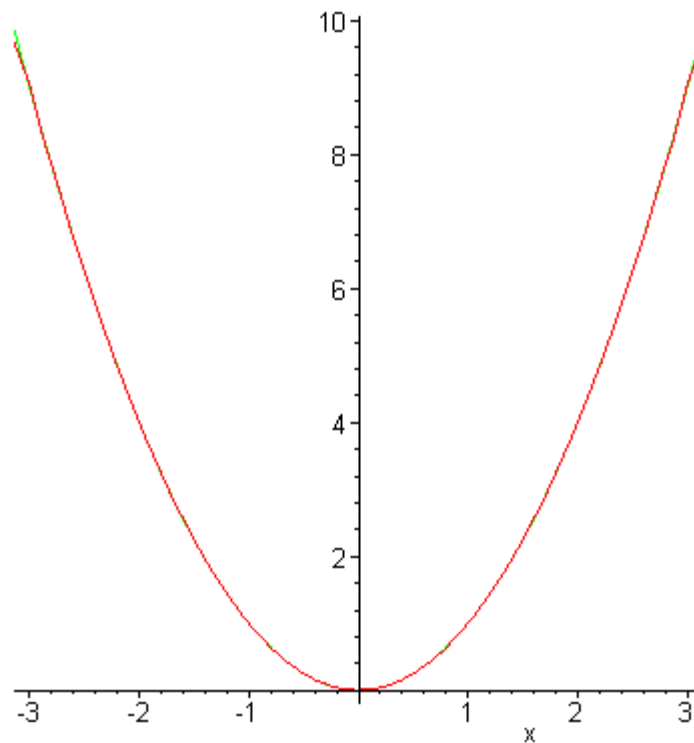
```

$$\begin{aligned}
s := & \frac{10.33542556}{\pi} - 12.56637061 \frac{\cos(x)}{\pi} + 3.141592654 \frac{\cos(2x)}{\pi} - 1.396263402 \frac{\cos(3x)}{\pi} \\
& + .7853981634 \frac{\cos(4x)}{\pi} - .5026548246 \frac{\cos(5x)}{\pi} + .3490658504 \frac{\cos(6x)}{\pi} - .2564565432 \frac{\cos(7x)}{\pi} \\
& + .1963495409 \frac{\cos(8x)}{\pi} - .1551403780 \frac{\cos(9x)}{\pi} + .1256637061 \frac{\cos(10x)}{\pi} - .1038543026 \frac{\cos(11x)}{\pi} \\
& + .08726646260 \frac{\cos(12x)}{\pi} - .07435722257 \frac{\cos(13x)}{\pi} + .06411413579 \frac{\cos(14x)}{\pi} - .05585053607 \frac{\cos(15x)}{\pi} \\
& + .04908738522 \frac{\cos(16x)}{\pi} - .04348225126 \frac{\cos(17x)}{\pi} + .03878509449 \frac{\cos(18x)}{\pi} - .03480989090 \frac{\cos(19x)}{\pi} \\
& + .03141592654 \frac{\cos(20x)}{\pi}
\end{aligned}$$

```

> plot({s,f(x)},x=-Pi..Pi);

```



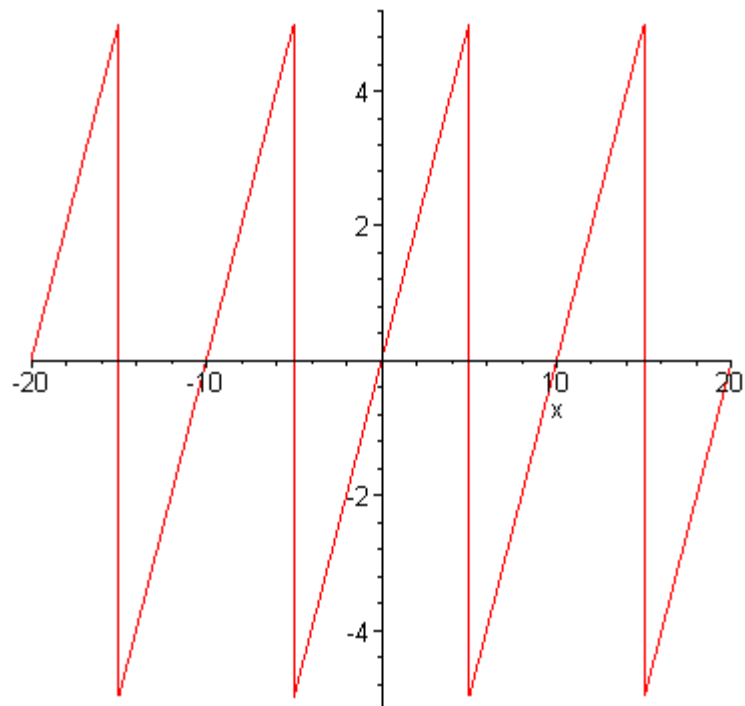
Vamos olhar em vários períodos! Temos um truque para plotar a extensão

periódica de x^2 . Primeiro precisamos uma expressão periódica da função identidade x :

> **pex:=(x,p)->-p+ x+p-floor((x+p)/(2*p))*2*p;**

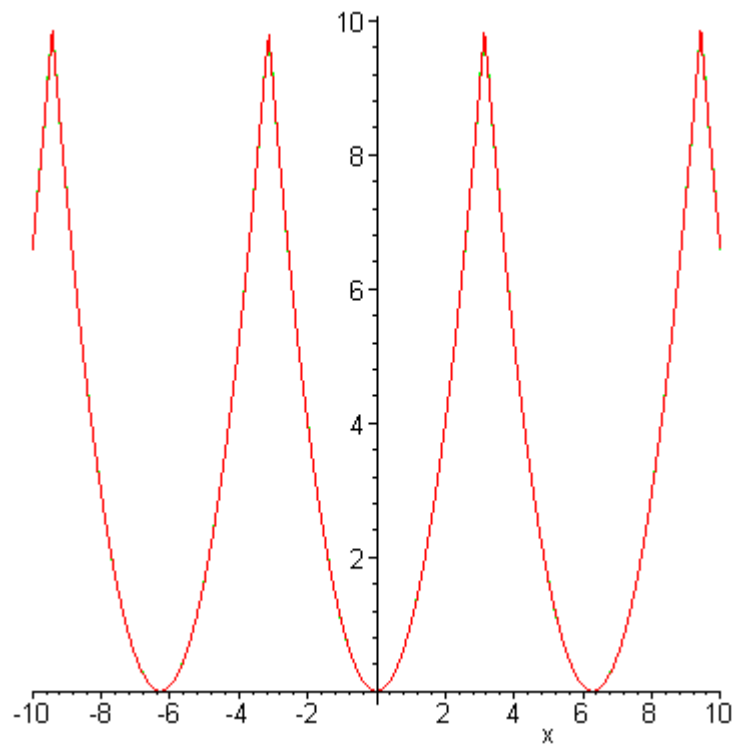
$$pex := (x, p) \rightarrow x - 2 \operatorname{floor}\left(\frac{1}{2} \frac{x+p}{p}\right) p$$

> **plot(pex(x,5),x=-20..20);**



Então podemos substituir pex para x em x^2 :

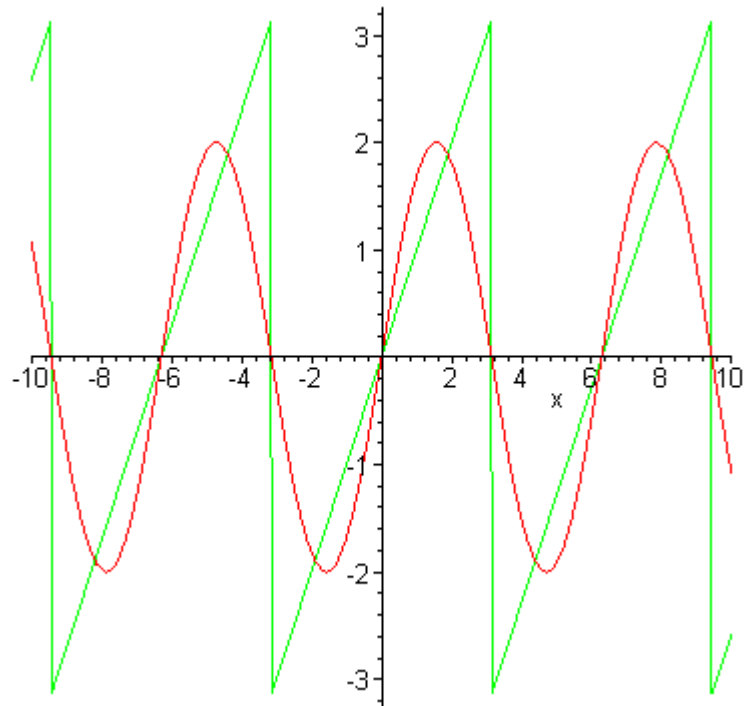
> **plot({s,subs(x=pex(x,Pi),x^2)},x=-10..10);**



O que acontece na descontinuidade das funções, por exemplo pex ?

(Note que podemos calcular a função $x \rightarrow x$ quando calculamos a série de Fourier, pois esta coincide com $\text{pex}(x, \text{Pi})$ sobre o intervalo de integração, e porque fazendo isto economizamos tempo de computação.

> **plot({pex(x,Pi),fourierseries(x->x,1,Pi)},x=-10..10);**



> **plot({pex(x,Pi),fourierseries(x->x,10,Pi)},x=-10..10);**

