

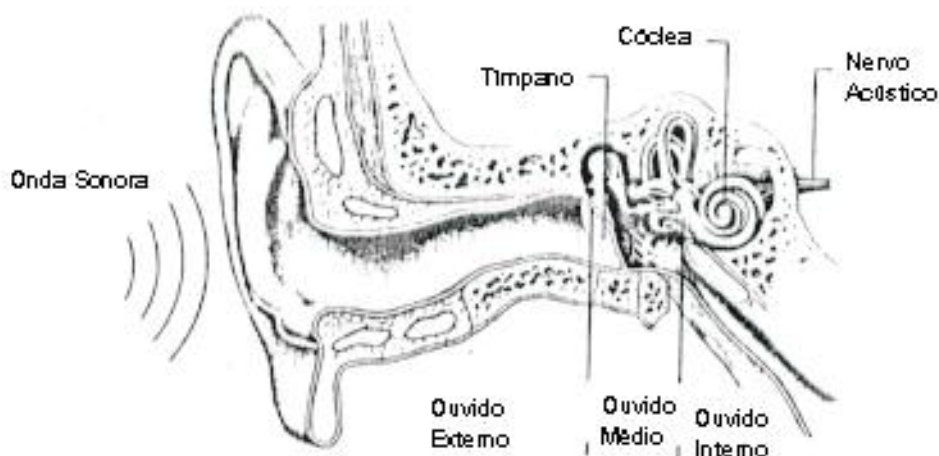
## SÉRIES DE FOURIER E A AUDIÇÃO HUMANA

O ouvido é dividido em três componentes principais:

- ouvido externo;
- ouvido médio;
- ouvido interno.

A sensação auditiva depende dos seguintes fatores nesta ordem:

- 1- As ondas sonoras entram pelo ouvido externo;
- 2- Atingem o tímpano fazendo-o vibrar;
- 3- A vibração se transmite aos três pequenos ossos do ouvido médio (bigorna, martelo e estribo);
- 4- Estes ossos transmitem a vibração para o líquido da cóclea do ouvido interno;
- 5- O líquido movimenta os cílios das células receptoras localizadas na cóclea que mantém contato com o nervo acústico;
- 6- O movimento dos cílios das células receptoras enviam estímulos elétricos ao longo do nervo acústico;
- 7- O nervo acústico leva a mensagem ao cérebro, que a interpreta como som.



As ondas sonoras são uma variação do tempo e da pressão do ar. A onda sonora senoidal pode ser escrita em função do tempo

$$q(t) = A_0 + A \sin \omega(t - \delta)$$

onde,

$q(t)$  é a pressão atmosférica no tímpano;

$A_0$  é a pressão atmosférica normal;

$A$  é o desvio máximo da pressão atmosférica normal;

$\omega/2\pi$  é a frequência da onda em ciclos por segundo;

$\delta$  é o período angular da onda.

Para o homem o alcance das ondas sonoras é de 20 cps a 20.000 cps.

Ondas sonoras mais complexas podem ser escritas como uma soma finita de componentes senoidais de diferentes amplitudes, frequência e período angular, então o sistema nervoso deixa de ser estimulado apenas por uma componente individual.

$$q(t) = A_0 + A_1 \sin \omega_1(t - \delta_1) + A_2 \sin \omega_2(t - \delta_2) + \dots + A_n \sin \omega_n(t - \delta_n) \quad (1)$$

Tomemos agora uma onda sonora periódica  $p(t)$  de período  $T$ , que não é uma soma finita de ondas senoidais. Se nós examinarmos a resposta do ouvido para esta onda periódica, nós encontramos a mesma resposta para uma onda que é soma finita de ondas senoidais. Então temos uma onda sonora  $q(t)$  que produz a mesma resposta que  $p(t)$ , ainda que  $p(t)$  e  $q(t)$  são diferentes funções do tempo.

A partir de  $p(t)$  vamos analisar a função  $q(t)$ . Visto que  $q(t)$  produz a mesma resposta que a onda periódica  $p(t)$ , é razoável esperar que  $q(t)$  tenha o mesmo período  $T$  de  $p(t)$ . Isto requer que cada termo senoidal em  $q(t)$  tenha período  $T$ . Consequentemente as frequências dos componentes senoidais devem ser múltiplos inteiros de uma frequência básica  $1/T$  de  $p(t)$ . O que quer dizer que  $\omega_k$  na equação (1) deve ser da seguinte forma

$$\omega_k = \frac{2k\pi}{T}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

mas visto que o ouvido não pode perceber ondas senoidais com frequência maior que 20.000 cps, nós podemos omitir valores de  $k$  para os quais  $\omega_k/2\pi = k/T$  é maior do que 20.000 cps.

Assim  $q(t)$  fica da seguinte forma

$$q(t) = A_0 + A_1 \sin \frac{2\pi}{T}(t - \delta_1) + A_2 \sin \frac{4\pi}{T}(t - \delta_2) + \dots + A_n \sin \frac{2n\pi}{T}(t - \delta_n) \quad (2)$$

com  $n/T \leq 20.000$  cps.

Voltamos agora nossa atenção para os valores de amplitude  $A_0, A_1, \dots, A_n$  e período angular  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ , que aparece na equação (2). Visto que  $p(t)$  produz a mesma resposta que  $q(t)$ , vamos examinar

$$e(t) = p(t) - q(t).$$

Se nós considerarmos  $q(t)$  uma aproximação de  $p(t)$ , então  $e(t)$  é o erro desta aproximação, um erro que o ouvido não pode perceber. Em termos de  $e(t)$  o critério para determinação da amplitude e o período angular é que a quantidade

$$\int_0^T [e(t)]^2 dt$$

seja a menor possível. É a energia acústica que é diferente entre duas ondas sonoras  $p(t)$  e  $q(t)$ , que determina se o ouvido percebe alguma diferença entre as ondas. Se esta energia é a menor possível então duas ondas sonoras diferentes produzem a mesma sensação de som.

Então se queremos aproximar uma função  $p(t)$  por outra função  $q(t)$ , este critério de aproximação é a integral

$$\int_0^T [p(t) - q(t)]^2 dt,$$

que é a aproximação de mínimo quadrado sobre o intervalo  $[0, T]$ . Esta integral é chamada de erro de mínimo quadrado.

**Teorema:** Seja  $f(t)$  contínua em  $[0, T]$ , e o polinômio trigonométrico  $g(t)$  dado por

$$g(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos \frac{2k\pi}{T}t + b_k \sin \frac{2k\pi}{T}t)$$

que minimiza o erro

$$\int_0^T [f(t) - g(t)]^2 dt.$$

Então,

os coeficientes são dados por

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \frac{2k\pi}{T}t dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \frac{2k\pi}{T}t dt$$

Exemplo:

Seja uma onda sonora  $p(t)$  com uma frequência de 5.000 cps. A pressão atmosférica normal (nível do mar), e amplitude máxima da onda é  $A$ . O período da onda é

$$T = \frac{1}{5000} = 0,0002 \text{ s. Para } t = 0 \text{ e } t = T, p(t) \text{ tem a equação}$$

$$p(t) = \frac{2A}{T} \left( \frac{T}{2} - t \right)$$

Fazendo os cálculos dos coeficientes temos

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^T \frac{2A}{T} \left( \frac{T}{2} - t \right) dt = 0$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T p(t) \cos \frac{2k\pi t}{T} dt = \frac{2}{T} \int_0^T \frac{2A}{T} \left( \frac{T}{2} - t \right) \cos \frac{2k\pi t}{T} dt = 0, \quad k = 1, 2, 3...$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T p(t) \sin \frac{2k\pi t}{T} dt = \frac{2}{T} \int_0^T \frac{2A}{T} \left( \frac{T}{2} - t \right) \sin \frac{2k\pi t}{T} dt = \frac{2A}{k\pi}, \quad k = 1, 2, 3...$$

Como  $\frac{4}{T} = 20.000$  cps, então temos que tomar  $k \leq 4$  pois acima deste valor o ouvido não terá nenhum estímulo nervoso. A aproximação para  $p(t)$  é então dada por

$$q(t) = \frac{2A}{\pi} \left( \sin \frac{2\pi}{T} t + \frac{1}{2} \sin \frac{4\pi}{T} t + \frac{1}{3} \sin \frac{6\pi}{T} t + \frac{1}{4} \sin \frac{8\pi}{T} t \right)$$

São quatros termos senoidal de frequência 5.000, 10.000, 15.000 e 20.000 cps respectivamente.

Embora  $q(t)$  não seja uma aproximação muito boa ponto a ponto sobre  $p(t)$ , para o ouvido  $p(t)$  e  $q(t)$  produzem a mesma sensação de som.

