Cálculo Diferencial e Integral: um kIT de sobrevivência

Prof. Doherty Andrade

Estudo de Curvas

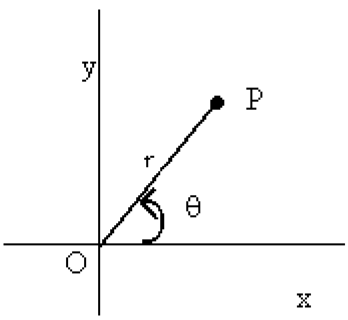
Vamos nos concentrar no conjunto solução de equações F(u,v)=0.

Temos especial interesse em equações do tipo $F(r, \theta) = 0$ dadas pelas coordenadas polares r, θ.

É claro que o conjunto solução de equações F(u,v)=0 em alguns casos pode ser vazio. Antes de passarmos ao estudo do conjunto solução, faremos uma revisão do sistema de coordenadas polares.

1. Revisão: Coordenadas polares

Já sabemos localizar um ponto no plano e no espaço usando coordenadas retangulares. É possível também localizar um ponto no plano usando um sistema de coordenadas chamado polares. Para introduzir este sistema de coordenadas polares, fixemos um ponto O chamado pólo e uma semi-reta com origem em O, chamada eixo polar. Por conveniência tomamos o sistema de eixos retangulares e fixemos o eixo polar em O na origem do sistema de eixos retangulares e para eixo polar tomemos o eixo OX. Veja a figura.

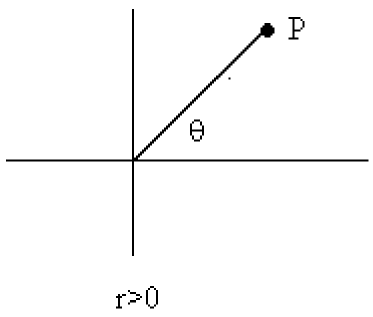


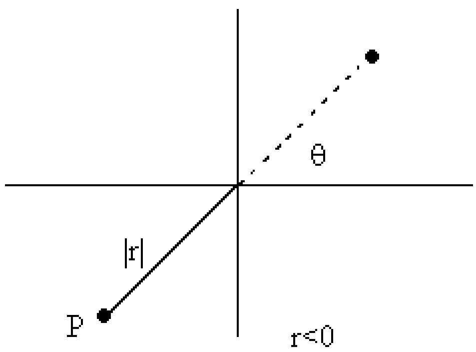
As coordenadas polares de um ponto P do plano são dadas basicamente pela distância r do ponto P ao pólo O e pelo ângulo θ formado pelo eixo polar com o segmento OP . Assim, dizemos que P tem coordenadas polares (r, θ), r é chamada coordenada radial e θ é chamada coordenada angular.

Se um ponto P tem coordenadas polares (r, θ) localizamos P do seguinte modo:

Primeiro localizamos o lado final do ângulo θ, onde θ é medido como na trigonometria (positivo no sentido anti-horario) .

Neste segmento do lado final do ângulo marcamos um segmento de comprimento r. Se $0 \leq r$, então P está no lado final do ângulo e se $r < 0$ então o ponto está no raio oposto. Veja a figura





A coordenada radial r é a distância orientado do ponto P ao pólo O.

Veja ilustração do plano polar ilustrando alguns raios e alguns ângulos.

Um ponto P pode ter mais de uma representação em coordenadas polares. Observe que, já de inicio (r, θ) e ($-r, \theta$ + π) representam o mesmo ponto. Mais geralmente

(r, θ) = ($r, \theta + 2\,n\,\pi$) representam o mesmo ponto

(r, θ) = (- $r, \theta + (2\,n + 1)\,\pi$) representam o mesmo ponto

Isto é **péssimo**, mas podemos **conviver** com isto sem problemas.

Para **converter** coordenadas polares em retangulares, usamos

$$x = r\cos(\theta) \quad \text{e} \quad y = r\,\text{sint}(\theta)$$

Exercício: A partir de x e y, dados na equações acima, recuperar r e θ.

2. Curvas em coordenadas polares

Algumas curvas têm equações em coordenadas polares que são mais simples do que em coordenadas retangulares. Isto já justifica o uso das coordenadas polares. O gráfico que uma equação em coordenadas polares, é o conjunto dos pontos P tais que P tem algum par de coordenadas (r, θ) que satisfaz a equação dada. O gráfico de uma equação $r = f(\theta)$ ou $\theta = f(r)$ pode ser construído calculando uma tabela com vários valores de (r, θ) e então marcando os pontos (r, θ) no plano polar.

Exemplos

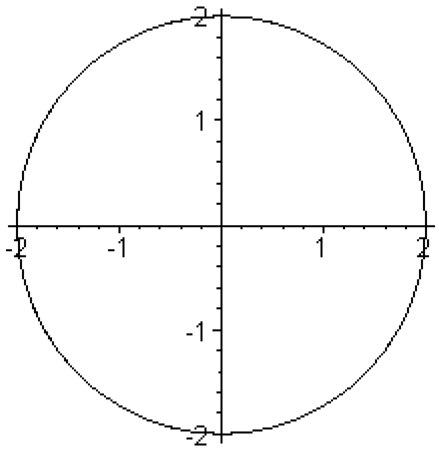
```
> with(plots):
```

1) $r = a$, onde a >0. (círculo)

Veja que aqui o raio é constante e o ângulo é qualquer.

Façamos o desenho para a=2.

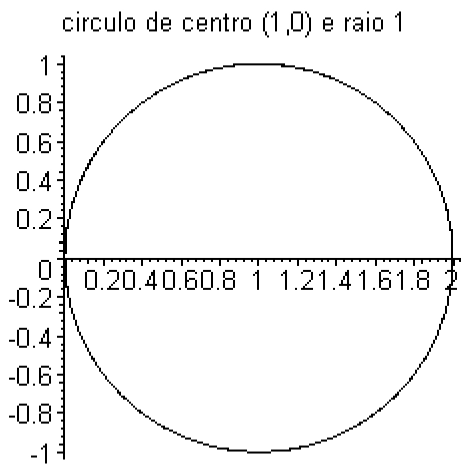
```
> polarplot([2,theta,theta=0..4*Pi],color=black);
```



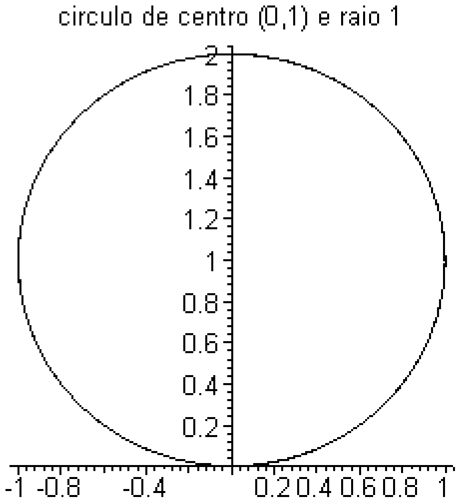
2) a) $r = 2\cos(\theta)$, (círculo)

b) $r = 2\sin(\theta)$, (círculo)

> **polarplot([2*cos(theta),theta,theta=0..4*Pi],color=black,title=`circulo de centro (1,0) e raio 1`);**

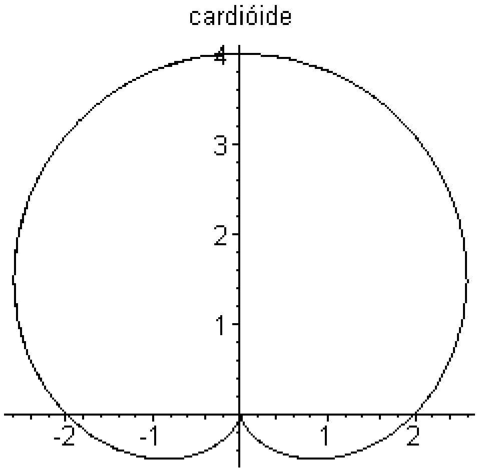


> **polarplot([2*sin(theta),theta,theta=0..4*Pi],color=black,title=`circulo de centro (0,1) e raio 1`);**

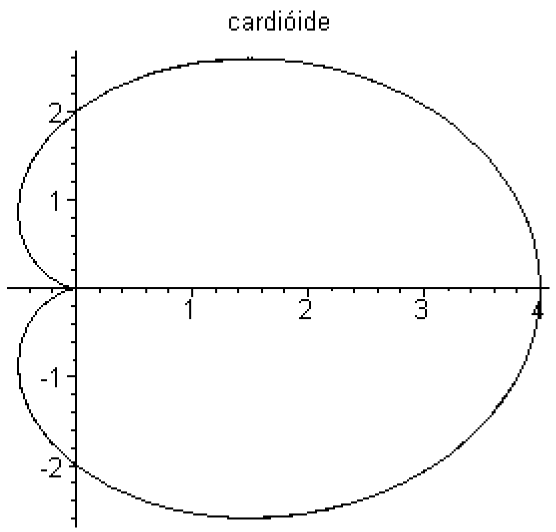


3) $r = 2 + 2\sin(\theta)$ cardióide

> **polarplot([2+2*sin(theta),theta,theta=0..4*Pi],color=black,title=`cardióide`);**

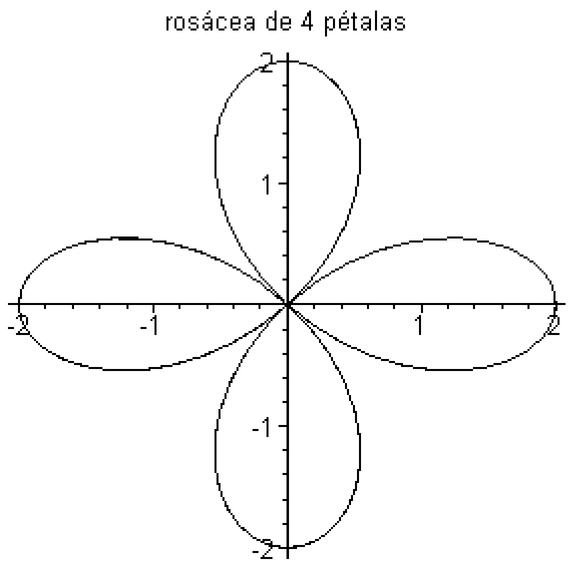


> **polarplot([2+2*cos(theta),theta,theta=0..4*Pi],color=black,title=`cardióide`);**



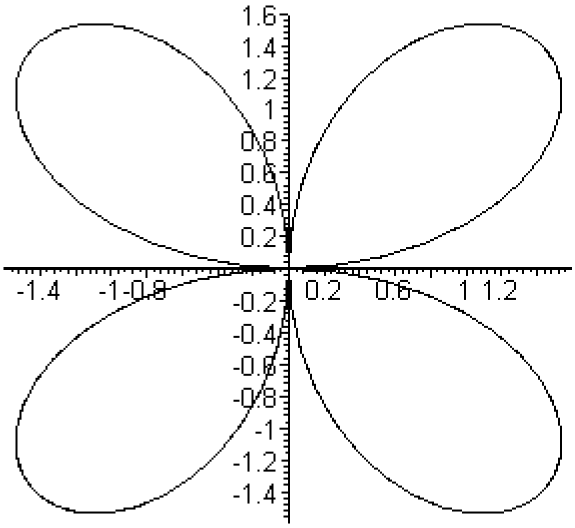
4) $r = 2\ \text{cost}(2\ \theta)$ rosácea de 4 pétalas

> **polarplot([2*cos(2*theta),theta,theta=0..4*Pi],color=black, title=`rosácea de 4 pétalas`);**



5) $r = 2\ \sin(2\ \theta)$ rosácea de 4 pétalas

> **polarplot([2*sin(2*theta),theta,theta=0..4*Pi],color=black);**

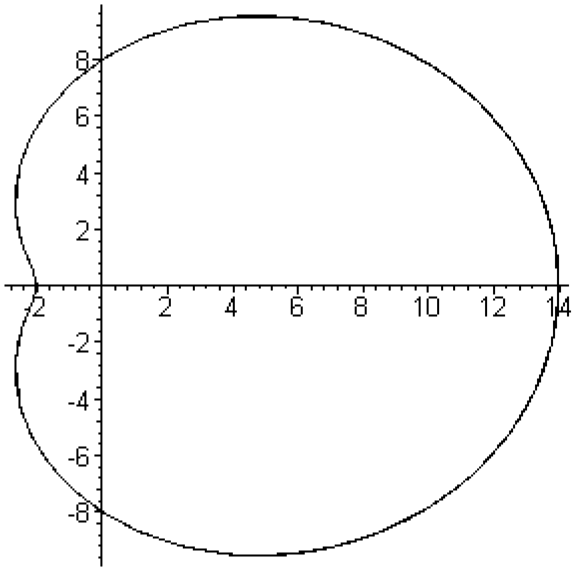


6) $r = 8 + 6\cos(\theta)$ limaçon é do tipo $a + b\cos(\theta)$

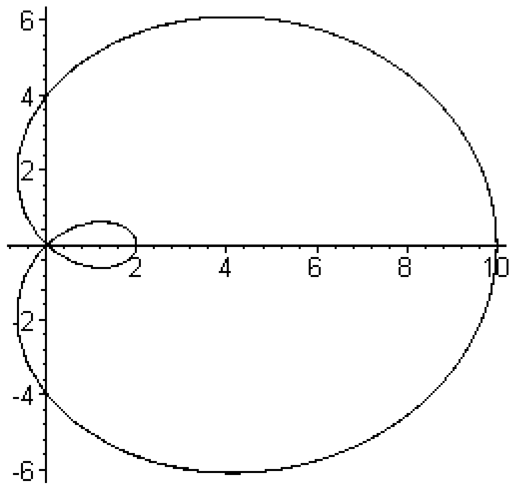
ou do tipo $a + b\sin(\theta)$

Veja o que ocorre quando a>b ou a< b.

```
> polarplot([8+6*cos(theta),theta,theta=0..8*Pi],color=black);
```

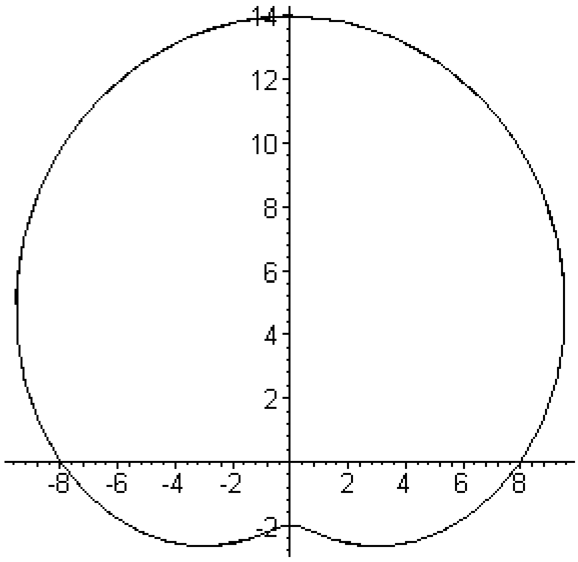



```
> polarplot([4+6*cos(theta),theta,theta=0..8*Pi],color=black);
```

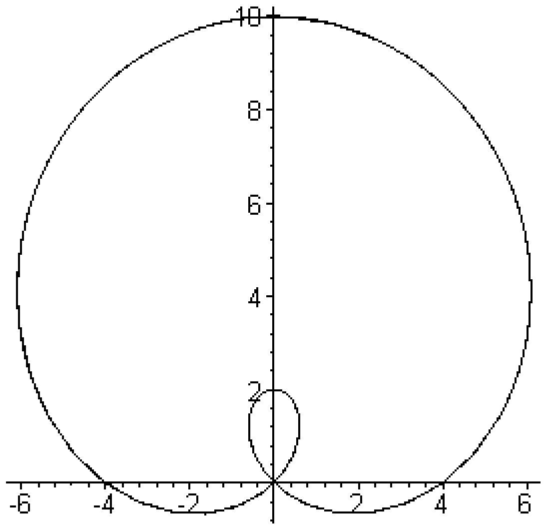


7) $r = 8 + 6\sin(\theta)$ limaçon

> **polarplot([8+6*sin(theta),theta,theta=0..4*Pi],color=black);**



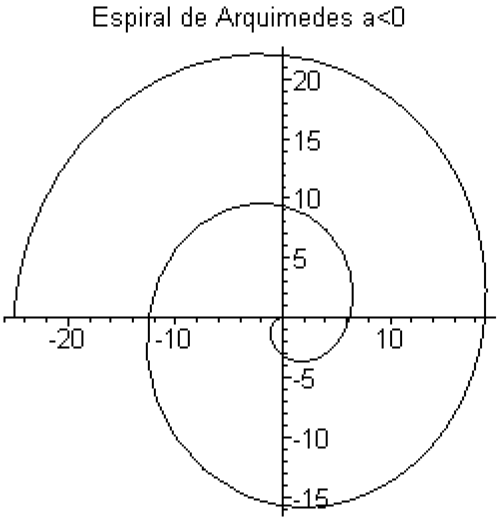
> **polarplot([4+6*sin(theta),theta,theta=0..8*Pi],color=black);**



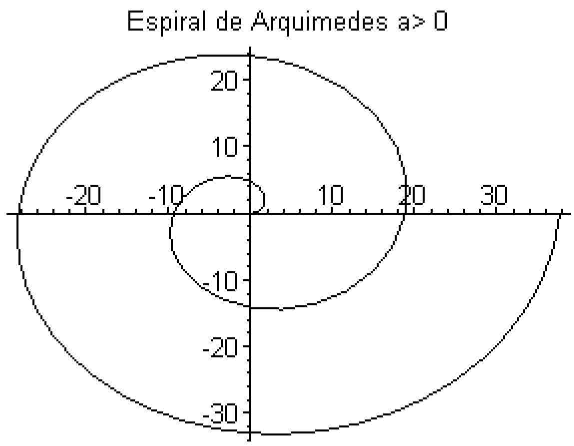
9) Espiral de Arquimedes: $r = a\,\theta$. Experimente valores de a> 0 e a<0.

Vamos fazer um exemplo com a=-2.

> **polarplot([-2*theta,theta,theta=0..4*Pi],color=black, title=`Espiral de Arquimedes a<0`);**



> **polarplot([3*theta,theta,theta=0..4*Pi],color=black, title=`Espiral de Arquimedes a> 0`);**



Agora vamos ver um procedimento que nos auxilia plotar curvas no plano polar.

```
> restart ; with(plots):
```

```
> polar:=proc(f,range) local i,p1,p2,p3;
p1:=plot([f*cos(t),f*sin(t),range],color=red,thickness=2):
p2:=display({seq(plot([i/2*cos(theta),i/2*sin(theta),theta=0..2*Pi],color=COLOR(RGB,0,1-i/10,0.7)),i=0..10)}):
p3:=display({seq(plot([[0,0],[5*cos(Pi*i/8),5*sin(Pi*i/8)]],color=COLOR(RGB,i/16,0,1)),i=0..16)}):
display({p1,p2,p3},axes=framed,scaling=constrained,labels=['x','y']);
end:
```

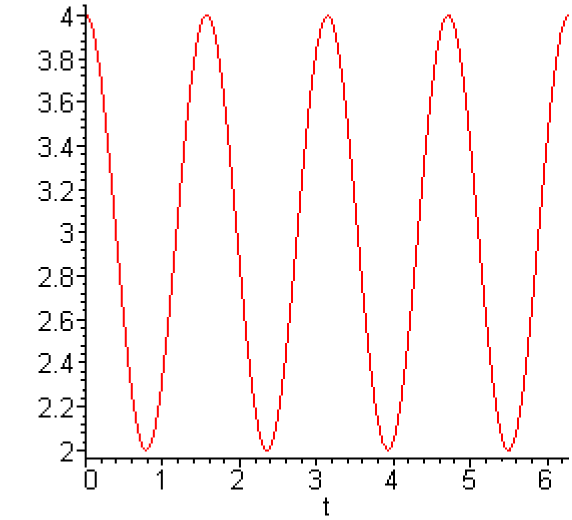
Exemplos (use apenas parametro t)

A curva $r = 3 + \cos(4\,t)$ é muito fácil de se desenhar num sistema de coordenadas retangulares com eixos θ -r:

O gráfico do cosseno (com amplitude 1) é deslocado de 3 unidades, e a frequência é 4 vezes a padrão .

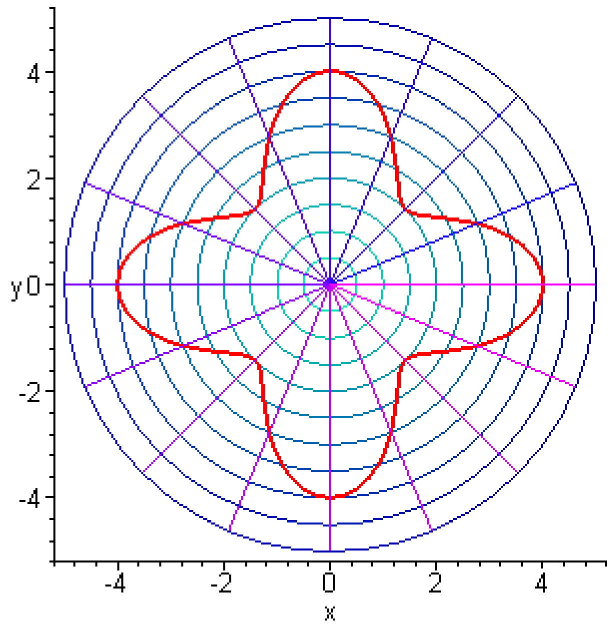
A curva oscila 4 vezes entre a reta horizontal r=2 e r=4 .

```
> plot(3+cos(4*t), t=0..2*Pi);
```

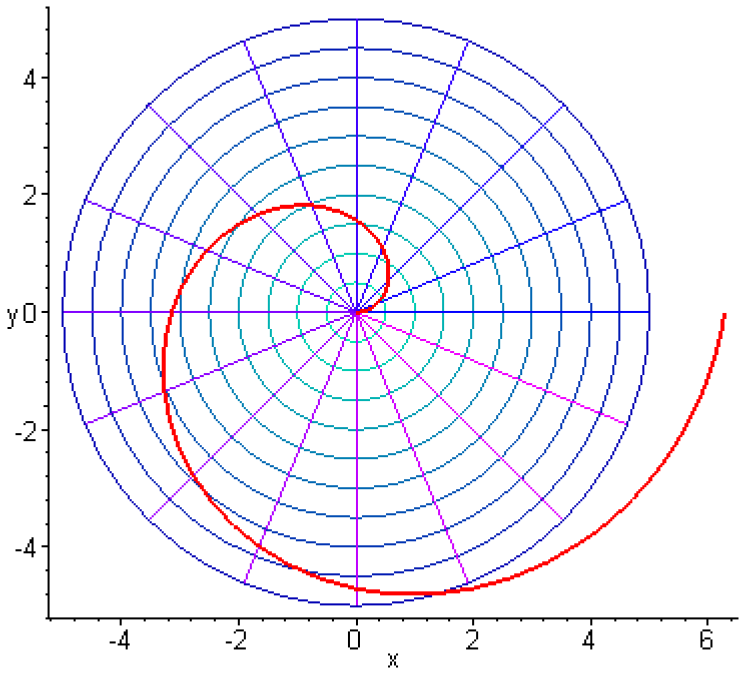


No Plano polar o seu gráfico é o seguinte

> **polar(3+cos(4*t),t=0..2*Pi);**



> **polar(t,t=0..2*Pi);###espiral**



Observações

Até agora temos encontrado curvas principalmente como gráficos de equações. Uma equação da forma y= f(x) ou x = g(y) determinam curvas dando uma variável explicitamente como função de outra. Uma equação da forma F(x,y) =0 também pode determinar uma curva, onde cada variável é dada implicitamente como função da outra.

Outro importante tipo de curva é aquele descrito pela trajetória de um ponto movendo-se no plano coordenado (também no espaço). A posição do ponto no instante t é dada por ($\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)$) no plano ou ($\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), \mathbf{z}(t)$) no espaço. Tal descrição envolve uma terceira variável (ou quarta variável, quando no espaço) que é o parâmetro t .

Assim, um parâmetro é uma variável independente.

3. Curvas Parametrizadas

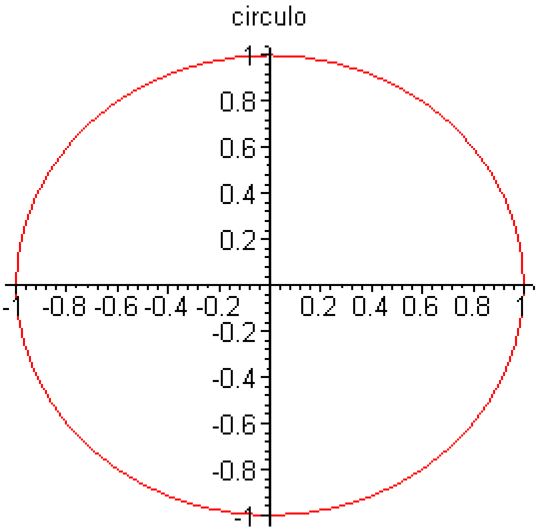
Uma curva parametrizada no plano é um par de funções

$x = \mathbf{x}(t)$ e $y = \mathbf{y}(t)$, que dá x e y como funções contínuas de t , onde t varia num intervalo do reais.

Exemplos

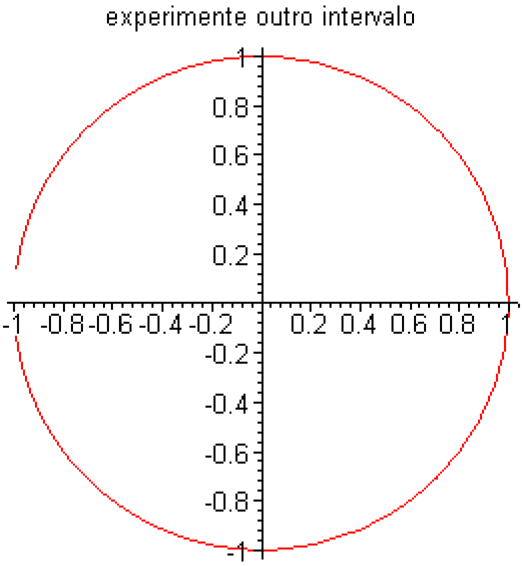
1) $x = \cos(t)$ e $y = \mathrm{sint}(t)$, t pertence a [$0, 2\pi$]

> **plot([cos(t),sin(t),t=0..2*Pi], title=`circulo`);**



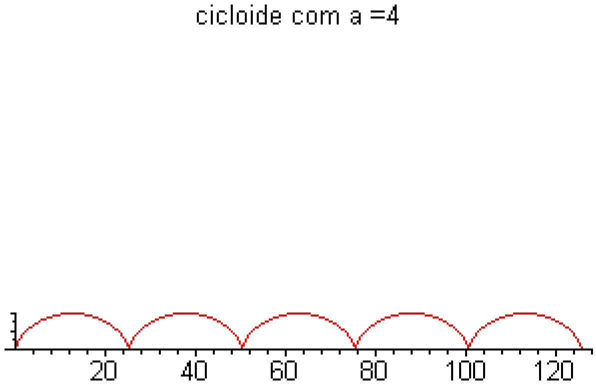
2) x = ($\frac{1-t^2}{1+t^2}$) e y = $\frac{2t}{1+t^2}$, onde t é qualquer real.

> **plot([(1-t^2)/(1+t^2),2*t/(1+t^2),t=-15..15], title=`experimente outro intervalo`);**

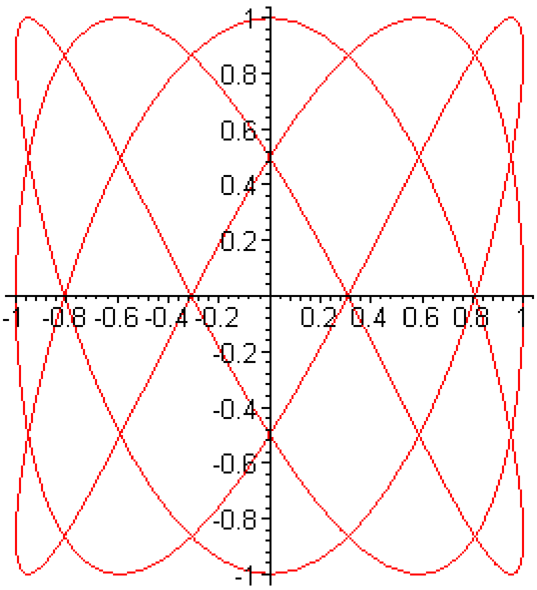


3) $x = a\,(t - \mathrm{sint}(t))$ e $y = a\,(1 - \cos(t))$

> **plot([4*(t-sin(t)),4*(1-cos(t)),t=0..10*Pi], title=`cicloide com a =4`);**



> **plot([cos(3*t),sin(5*t),t=0..2*Pi]);**



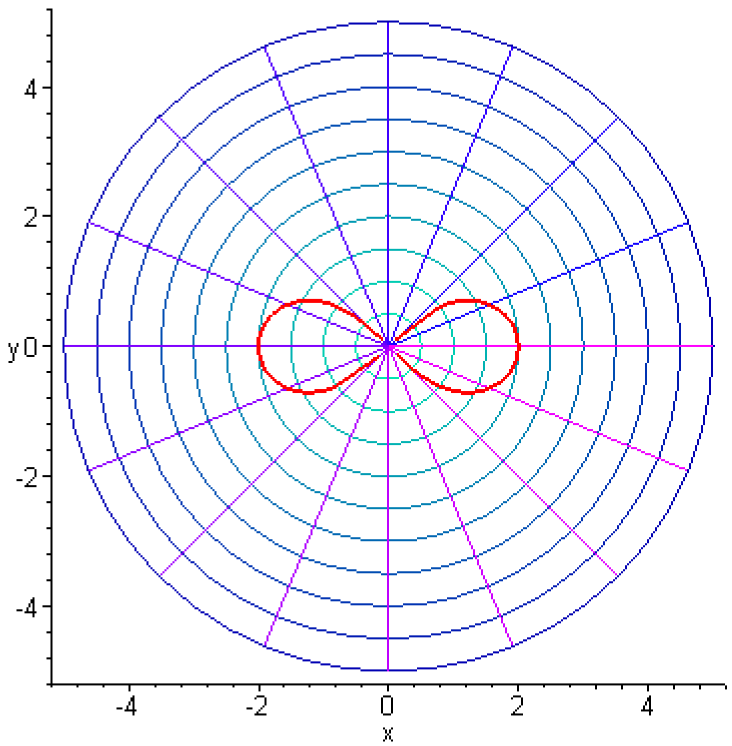
Exercícios

Use o procedimento acima para plotar as curvas dadas em coordenadas polares

$$r^2 = a^2 \cos(2\,t)$$

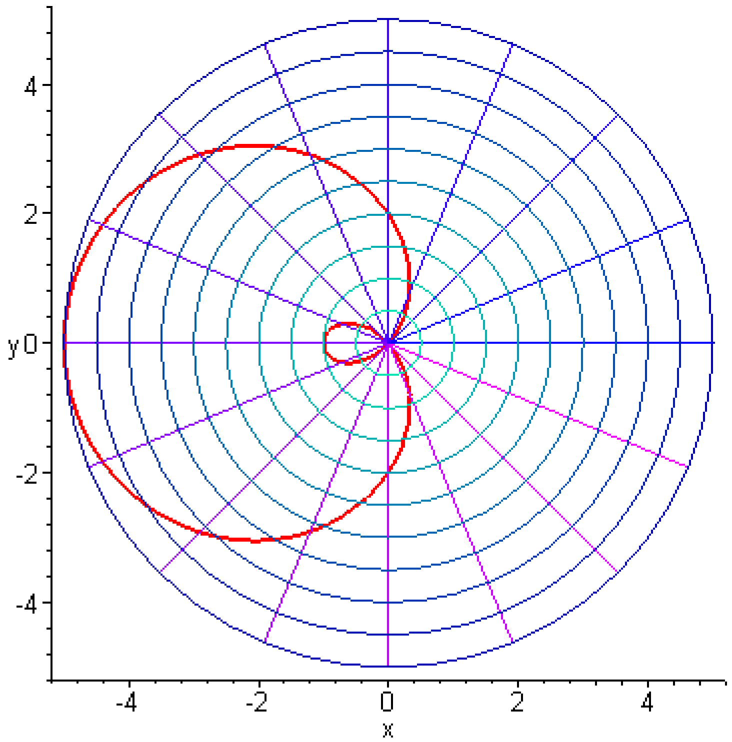
1) Leminscata de Bernoulli

> **polar(sqrt(2^2*cos(2*t)), t=0..2*Pi);**



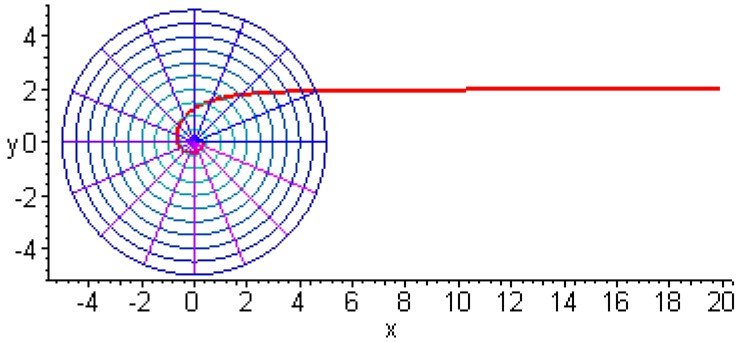
2. Limaçon $r = b - a \cos(t)$, b< a.

> **polar(2-3*cos(t), t=0..2*Pi);**



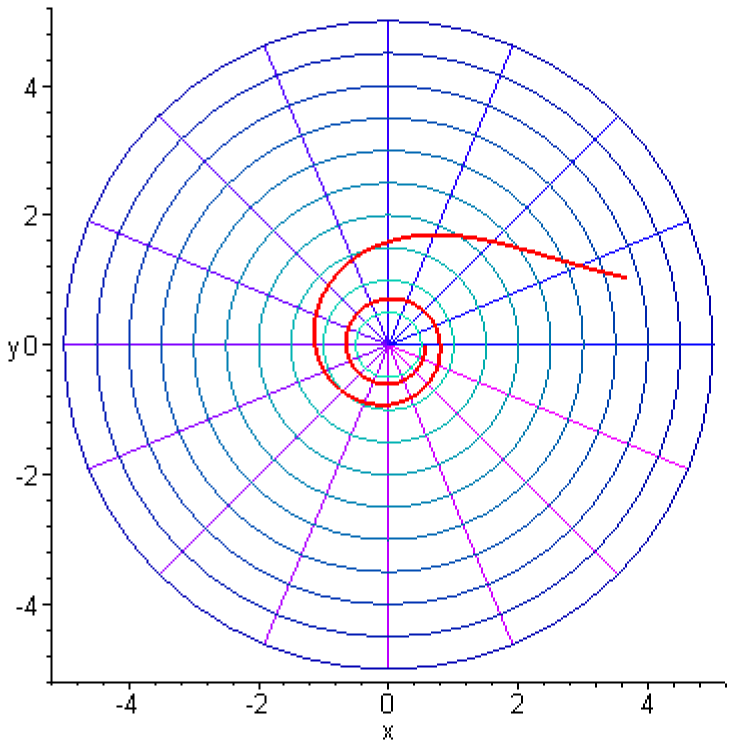
3. Espiral hiperbólica: $r\,t = a$,

> **polar(2/t, t=0.1..2*Pi);**



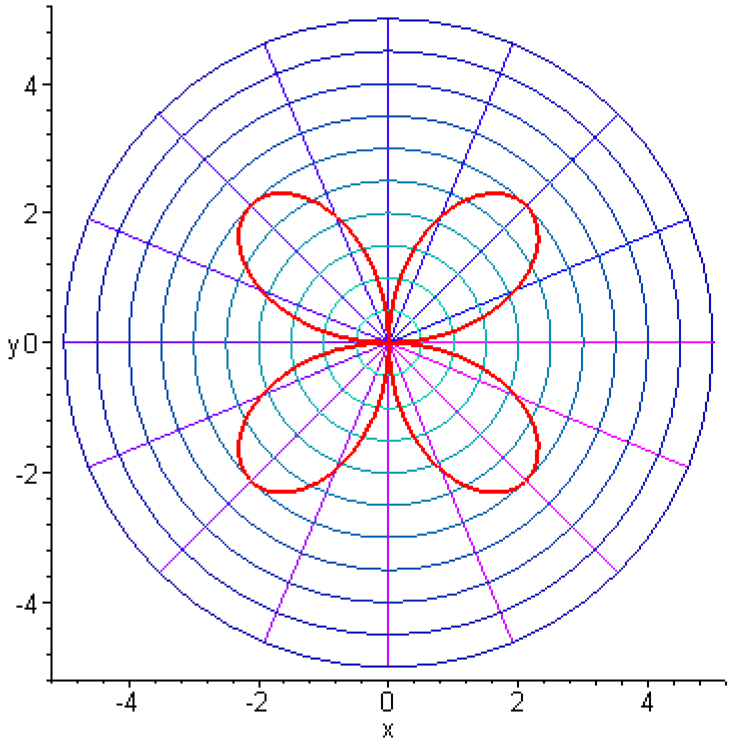
4. Litus : $r^2\,t = a^2$,

> **polar(2/sqrt(t), t=0..4*Pi);**

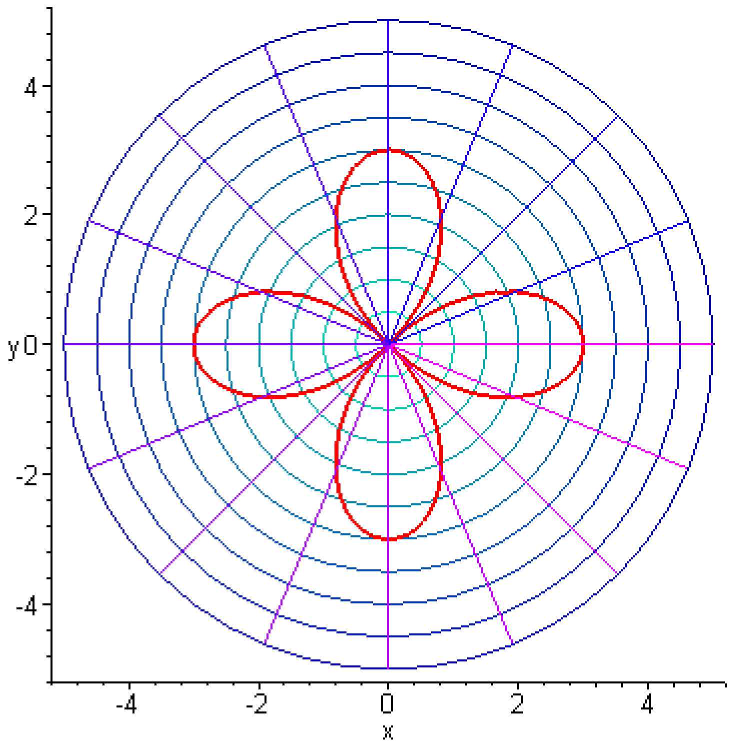


Rosácea de 4 pétalas

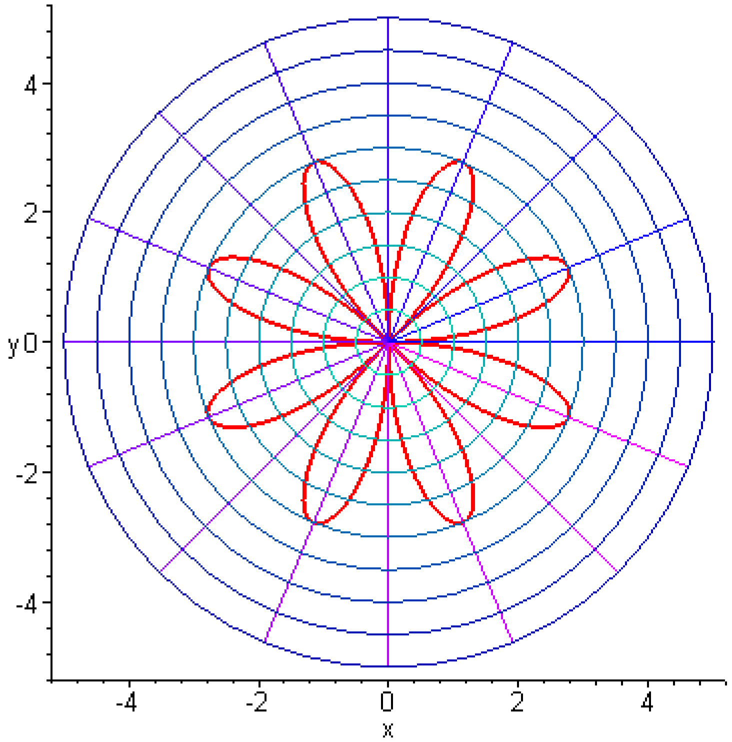
> **polar(3*sin(2*t), t=0..2*Pi);**



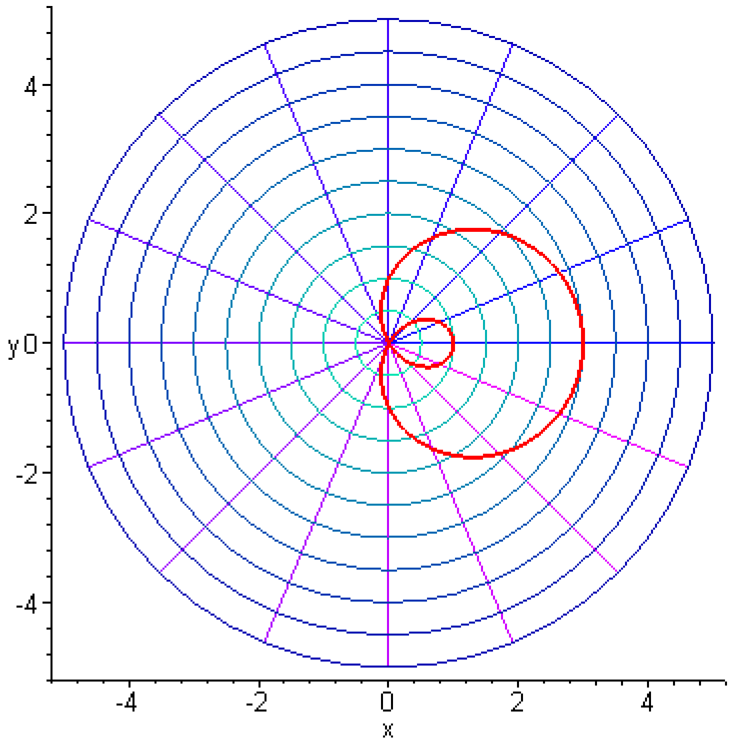
> **polar(3*cos(2*t), t=0..2*Pi,title=`rosacea de 4 petalas`);**



> **polar(3*sin(4*t), t=0..2*Pi, title=`rosacea de 8 petalas`);**



> **polar(1+2*cos(t), t=0..2*Pi, title=`cardioides`);**



>

Invente mais e divirta-se.