Universidade Estadual de Maringá - Departamento de Matemática
Cálculo Diferencial e Integral: um KIT de Sobrevivência

Existência de solução para EDO de primeira Ordem

Doherty Andrade
Universidade Estadual de Maringá
Departamento de Matemática - 87020-900 Maringá-PR, Brazil

Resumo: Nestas notas vamos apresentar o Teorema de existência de solução ra EDO de primeira ordem, seção §2.1. Vamos ilustrar o método das iteradas de Picard para determinar numericamente uma aproximação de solução, seção§2.2 destas EDO's usando o Maple.

Sumário

Capítulo 1

Princípio da Contração

Um dos teoremas mais importantes sobre ponto fixo é o teorema do ponto fixo de Banach ou o princípio da contração. Sejam (M, d) e (N, d_1) dois espaços métricos. Uma aplicação $f : M \to N$ é dita uma contração se existe $0 \leq k < 1$ tal que

$$d_1(f(x), f(y)) \leq kd(x, y), \ \forall x, y \in M.$$

É fácil ver que toda contração é uniformemente contínua.

1.1 O Teorema de Ponto Fixo

Teorema 1.1 *Sejam (M, d) um espaço métrico completo e $f : M \to M$ uma contração. Então, f possui um único ponto fixo em M. Além disso, dado $x_0 \in M$ a sequência definida por*

$$x_1 = f(x_0), \ \ x_{n+1} = f(x_n), \ n \geq 1. \tag{1.1.1}$$

é uma sequência convergente e $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ é ponto fixo de f.

A sequência dada pelo Teorema pode ser usada para determinar numericamente uma aproximação de soluções de EDO's. Veja o Teorema 2.1. Veja também a página `http://www.dma.uem.br/kit/edo1ordem.html` para exemplos usando o Maple.

Demonstração: se a sequência (x_n) definida acima converge para $a \in M$, então como f é contínua temos

$$f(a) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = a.$$

Provando que a é ponto fixo de f.

Se f tem dois pontos fixos a e b, então temos

$$d(a,b) = d(f(a), f(b)) \leq kd(a,b),$$

o que é absurdo a menos que $a = b$. Logo, $a = b$.

Resta provar que a sequência (x_n) converge. Notemos que $d(x_1, x_2) \leq kd(x_0, x_1)$ e que em geral $d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0), \forall n \in \mathbb{N}$. Segue que para $n, p \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq [k^n + k^{n+1} + \cdots + k^{n+p-1}]d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Como $\lim k^n = 0$ segue que a sequência é de Cauchy e portanto convergente, o que completa a prova do teorema. ∎

Exemplo 1.2 *Seja $f : [a,b] \to [a,b]$ uma aplicação contínua com derivada tal que $\sup_{x \in [a,b]} |f'(x)| < 1$. Então, f é uma contração.*

Este resultado decorre da seguinte desiguadade

$$|f(y) - f(x)| \leq |y - x| \sup_{c \in (a,b)} |f'(c)| \leq k|y - x|.$$

Agora vamos ver um resultado que estabelece a relação entre pontos fixos de duas contrações. Duas aplicações A e B de um espaço métrico (M, d) em (M, d) são ditas ε-próximas se

$$d(Ax, Bx) \leq \varepsilon, \ \forall x \in M.$$

Teorema 1.3 *Sejam A e B duas contrações definidas sobre um espaço métrico completo (M, d). Suponha que*

$$d(Ax, Ay) \leq k_A d(x, y) \qquad d(Bx, By) \leq k_B d(x, y), \ \forall x, y \in M$$

e que A e B são ε-próximas. Então, a distância entre seus pontos fixos não excede $\dfrac{\varepsilon}{(1-k)}$, onde $k = \min\{k_A, k_B\}$.

Demonstração: Sejam x_0 e y_0 pontos fixos de A e B, respectivamente. Então y_0 é o limite da sequência $Bx_0, B^2x_0, \cdots, B^nx_0, \cdots$. Assim, temos que

$$d(x_0, B^n x_0) \leq \frac{1}{1-k_B} d(x_0, Bx_0) = \frac{1}{1-k_B} d(Ax_0, Bx_0) \leq \frac{\varepsilon}{1-k_B},$$

pois A e B são ε-próximas. Tomando o limite quando $n \to \infty$ obtemos

$$d(x_0, y_0) \leq \frac{\varepsilon}{1 - k_B}.$$

Repetindo o mesmo argumento com a sequência $Ax_0, A^2x_0, \cdots, A^nx_0, \cdots$, obtemos que

$$d(x_0, y_0) \leq \frac{\varepsilon}{1 - k_A}.$$

Isto conclui a prova do teorema. ∎

Capítulo 2

O Teorema de Existência de Soluções de EDO

Vamos dar a prova do teorema de existência e unicidade de soluções de EDO's numa situação particular. A prova no caso geral para espaços de Banach não será discutida aqui.

2.1 O Teorema

Teorema 2.1 (Existência e Unicidade) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ função contínua com $f_y : \Omega \to \mathbb{R}$ também contínua. Dado $(t_0, y_0) \in \Omega$, existe um intervalo aberto $I \ni t_0$ e uma única função diferenciável $\varphi : I \to \mathbb{R}$ com $(t, \varphi(t)) \in \Omega$, para todo $t \in I$, que é solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y\prime(t) = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{2.1.1}$$

Demonstração: A função $\varphi : I \to \mathbb{R}$ é solução de (2.1.1) se e somente se, for solução da equação integral

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds, \quad \forall t \in I. \tag{2.1.2}$$

Assim, vamos estudar detalhadamente a equação (2.1.2). Sejam a e b reais positivos tal que o retângulo

$$R = \{(t, y); |t - t_0| \leq a \text{ e } |y - y_0| \leq b\}$$

esteja inteiramente contido em Ω. Como f é contínua e R é compacto, então f é limitada em R, seja

$$M = \max\{|f(t,y)|; (t,y) \in R\}.$$

Tome

$$0 < \overline{a} \leq \min\{a, \frac{b}{M}\}$$

e o intervalo

$$J_{\overline{a}} = [t_0 - \overline{a}, t_0 + \overline{a}].$$

Seja

$$\mathcal{C} = \{g; g : J_{\overline{a}} \to \mathbb{R} \text{ contínua }, g(t_0) = y_0 \text{ e } |g(t) - y_0| \leq b\}.$$

Munimos $\mathcal{C}$ da seguinte métrica

$$d(g_1, g_2) = \max\{|g_1(t) - g_2(t)|; t \in J_{\overline{a}}\}.$$

Segue que $(\mathcal{C}, d)$ é um espaço métrico. Mais ainda, $(\mathcal{C}, d)$ é um espaço métrico completo, isto é, toda sequência de Cauchy é convergente.

De (2.1.2) observamos que toda solução deve ser ponto fixo da aplicação dada por $\mathcal{C} \ni g \mapsto \Phi(g)$ onde

$$\Phi(g)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, g(s))ds. \tag{2.1.3}$$

É fácil ver que $\Phi(g)$ é contínua em $J_{\overline{a}}$ e $\Phi(g)(t_0) = y_0$. Além disso,

$$|\Phi(g)(t) - y_0| \leq |\int_{t_0}^{t} f(s, g(s))ds| \leq M|t - t_0| \leq M\overline{a} \leq b$$

e portanto $\Phi(g) \in \mathcal{C}$. Logo temos que

$$\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}.$$

Por outro lado, se g_1 e g_2 pertencem a $\mathcal{C}$ temos que

$$|\Phi(g_1)(t) - \Phi(g_2)(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s, g_1(s)) - f(s, g_2(s))|ds.$$

Como f é Lipschitiziana na variável y, existe uma constante positiva k tal que

$$|\Phi(g_1)(t) - \Phi(g_2)(t)| \leq \int_{t_0}^{t} k|g_1(s) - g_2(s)|ds \leq k\overline{a}d(g_1, g_2).$$

Segue que
$$d(\Phi(g_1), \Phi(g_2)) \leq k\overline{a}d(g_1, g_2).$$
Tomando $\overline{a}$ tal que $k\overline{a} < 1$ concluímos que Φ é uma contração. Pelo Teorema da contração, Φ tem um único ponto fixo e o teorema fica provado com $I = (t_0 - \overline{a}, t_0 + \overline{a})$. ∎

Apenas a continuidade da f já garante a existência de solução mas não a unicidade. Para obtermos unicidade é preciso assumir alguma condição adicional.

Exemplo 2.2 *Consideremos o seguinte problema de valor inicial*
$$\begin{cases} y\prime(x) = |y|^{\frac{1}{2}}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Neste exemplo a função $f(x, y) = |y|^{\frac{1}{2}}$ *é contínua em todo o plano* $\mathbb{R}^2$ *e vemos claramente que* $y(x) \equiv 0$ *é solução. Mas existe ainda outra solução,*
$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2, x \geq 0, \\ -\frac{1}{4}x^2, x < 0. \end{cases}$$
Isto ocorre porque f_y *não é contínua em* 0.

Exemplo 2.3 *Agora consideremos o seguinte problema*
$$\begin{cases} y\prime(x) = y^2, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

A função $f(x, y) = y^2$ *e* f_y *são contínuas em todo o plano* $\mathbb{R}^2$*, assim o teorema diz que existe uma e apenas uma solução em um intervalo* $(1-\overline{a}, 1+\overline{a})$.

2.2 Um exemplo numérico

Uma vez que o operador dado em 2.1.3 é uma contração podemos usar a sequência introduzida em 1.1.1 para gerar aproximações da solução de uma EDO de primeira ordem.

O processo iterativo de Picard consiste em construir uma sequência (x_n) de funções que se aproximam cada vez mais da solução procurada. Como exemplo, consideremos o seguinte PVI
$$\begin{cases} y\prime(x) = 2x(y + 1), \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Primeiramente, vamos escrever a equção integral equivalente

$$y(x) = \int_0^x 2s(y(s)+1)ds.$$

Façamos $y_0(x) = 0$ e para $n \geq 1$ usamos a fórmula

$$y_{n+1}(x) = \int_0^s 2s(y_n(s)+1)ds.$$

Para $y_1(x)$ obtemos

$$y_1(x) = \int_0^x 2sds = x^2.$$

Substituindo na fórmula geral da sequência obtemos $y_2(x)$,

$$y_2(x) = \int_0^x 2s(y_1(s)+1)ds = \int_0^x 2s(s^2+1)ds = x^2 + \frac{x^4}{2}.$$

Continuando desta forma obtemos uma sequência $y_n(x)$. Vamos determinar mais alguns termos desta sequência:

n	$y_n(x)$
$n = 0$	$y_0(x) = 0$
$n = 1$	$y_1(x) = x^2$
$n = 2$	$y_2(x) = x^2 + \frac{x^4}{2}$
$n = 3$	$y_3(x) = x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3!}$
$n = 4$	$y_4(x) = x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!}$
$\cdots$	$\cdots$
$n = k$	$y_k(x) = \sum_{i=0}^{k} \dfrac{x^{2i}}{i!}$

Do nosso conhecimento sobre séries de Taylor sabemos que esta sequência converge para $y(x) = \exp(x^2) - 1$. Veja também, para exemplos usando o Maple, http://www.dma.uem.br/kit/edo1ordem.html

2.3 Outros Resultados

Agora vamos provar que se duas soluções φ e ψ coincidem em algum ponto $t = t_0$ então elas coincidirão em todos os valores de t em que estiveram definidas.

Teorema 2.4 *Sejam φ e ϕ soluções de (2.1.1), definidas em intervalos I_1 e I_2, respectivamente. Suponha $t_0 \in I_1 \cap I_2$ que e $\varphi(t_0) = \phi(t_0) = x_0$. Então, φ e ϕ coincidem em todos os valores de $t \in I_1 \cap I_2$.*

Demonstração: Sejam $x = \varphi(t)$ e $y = \phi(t)$ duas soluções satisfazendo

$$\varphi(t_0) = \phi(t_0) = x_0.$$

Seja $J = (r_1, r_2) = I_1 \cap I_2$ o intervalo em que φ e ϕ estão definidas. Seja

$$N = \{t; t \in J \quad \text{e} \quad \varphi(t) = \phi(t).\}.$$

Note que N é não vazio, pois $t_0 \in N$. Mostraremos que N é aberto e fechado em J e como J é conexo teremos que $J = N$.

Seja (t_n) uma sequência de elementos de N convergente para $t \in J$. Assim, $\varphi(t_n) = \phi(t_n)$. Como φ e ϕ são contínuas temos que $\varphi(t) = \phi(t)$, segue que $t \in N$. Logo, N é fechado em J.

Seja $t_1 \in N$. Então, temos que $\varphi(t_1) = \phi(t_1) = x_1$. Resolvendo o problema de valor inicial com o par (t_1, x_1), o Teorema de existência e unicidade nos dá $\overline{a}$ e b tal que $K\overline{a} < 1$. Podemos escolher, usando a continuidade de φ e ϕ, $\overline{a}$ tal que

$$\|\varphi(t) - \phi(t)\| \leq b,$$

com $|t - t_1| < \overline{a}$.

Como φ e ϕ são soluções temos que

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= x_1 + \int_{t_1}^{t} f(s, \varphi(s))ds, \\
\phi(t) &= x_1 + \int_{t_1}^{t} f(s, \phi(s))ds.
\end{aligned}$$

Para $|t - t_1| < \overline{a}$ obtemos

$$\|\varphi(t) - \phi(t)\| \leq K \int_{t_1}^{t} \|\varphi(s) - \phi(s)\|ds \leq bK\overline{a}.$$

Voltando na desigualdade anterior obtemos

$$\|\varphi(t) - \phi(t)\| \leq b(K\overline{a})^2.$$

Repetindo o argumento, chegamos que

$$\|\varphi(t) - \phi(t)\| \leq b(K\overline{a})^n,$$

para todo $n \geq 1$. Como $K\overline{a} < 1$ obtemos que $\varphi(t) = \phi(t)$ para todo $|t - t_1| < \overline{a}$. Logo, existe uma vizinhança de t_1 onde $\varphi(t)$ e $\phi(t)$ coincidem, isto é, N é aberto. Como N é não vazio, aberto e fechado em J e J é conexo, segue que $N = J$. ∎

Para o próximo resultado, que trata da contuidade da solução com os dados iniciais, vamos usar a seguinte notação, $u(t; t_0, y_0)$ denota a solução de (2.1.1) com $u(t_0) = y_0$.

Teorema 2.5 *Sob as mesmas hipóteses do teorema de existência, a solução $u(t; t_0, y_0)$ é função contínua de y_0 para t_0 e t fixos.*

Demonstração: Consideremos as seguintes aplicações

$$\begin{aligned} A_0 x(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau, \\ A_1 x(t) &= y_1 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau, \end{aligned}$$

cujos pontos fixos são as soluções com condições iniciais y_0 e y_1 num intervalo $[t_0, b]$. Podemos escolher $h < \overline{a}$ e considerar $J_h = [t_0, t_0 + h]$ intervalo fechado de modo que estas aplicações sejam contrações com mesma constante k. Se $d(y_0, y_1) \leq \varepsilon$ então as contrações são ε-próximas e portanto, pelo Teorema 1.3, a distância entre seus pontos fixos não excede $\dfrac{\varepsilon}{1-k}$. Segue que

$$\max\{d(u(t; t_0, y_0), u(t; t_1, y_1)),\ t \in J_h\} \leq \frac{\varepsilon}{1-k}.$$

Assim, duas soluções diferem no máximo por ε em $t = t_0$ e no máximo por $\dfrac{\varepsilon}{1-k}$ em todo o intervalo J_h.

Movendo o ponto inicial de t_0 para $t_1 = t_0 + h$ podemos estender a solução para o intervalo $[t_0, t_0 + 2h]$ e então repetir o argumento, Encontramos que as duas soluções diferem no máximo por $\dfrac{\varepsilon}{(1-k)^2}$.

Continuando este argumento, nós finalmente obtemos a seguinte estimativa

$$\max_{t_0 \leq t \leq b} \|u(t, t_0, u_0) - u(t, t_0, u_1)\| \leq \frac{\varepsilon}{(1-k)^m}, \tag{2.3.4}$$

onde

$$m = \left[\frac{b - t_0}{h}\right] + 1.$$

Assim, fazendo $\|u_0 - u\|$ suficientemente pequeno, podemos fazer o lado esquerdo de (2.3.4) tão pequeno quanto desejado. Isto prova a continuidade de $u(t, t_0, u_0)$. ∎

O teorema de existência de solução para equações diferenciais ordinárias garante a existência de solução numa vizinhança do ponto inicial t_0. A pergunta que surge naturalmente é: podemos estender esta solução para intervalos maiores? O seguinte resultado responde esta pergunta.

Se φ é uma solução do pvi definida num intervalo aberto I, dizemos que $\tilde{\varphi}$ é uma extensão de φ se $\tilde{\varphi}$ é solução do pvi, está definida em um intervalo aberto $\tilde{I}$ que contém propriamente I, e em I, $\tilde{\varphi}$ e φ coincidem. Se uma solução φ não admite uma extensão, dizemos que ela é uma solução maximal.

Teorema 2.6 *Sob as hipóteses do teorema de existência, temos que toda solução do problema (2.1.1) pode ser estendida a um intervalo maximal e este é aberto.*

Demonstração: Seja S o conjunto de todos as soluções φ_λ do (2.1.1) definidas em intervalos abertos $I_\lambda \ni t_0$. Seja $I = \cup I_\lambda$. Defina $\varphi : I \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(t) = \varphi_\lambda(t), \;\; t \in I_\lambda.$$

Notemos que I é aberto. Em em virtude do Teorema 2.4 φ está bem definida e além disso, φ é solução do PVI (2.1.1).

Suponha que $I = (\omega_-, \omega_+)$. Vamos provar que I é maximal, isto é, não existe um intervalo $\tilde{I}$ contendo propriamente I onde o PVI tenha solução $\tilde{\varphi}$. De fato, suponha que isto não seja verdade. Então este conteria uma das extremidades, digamos ω_+. Assim, o PVI dado por

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(w_+) = \tilde{\varphi}(w_+), \end{cases}$$

teria uma solução $\overline{\varphi}$ num aberto $(\omega_- - \overline{a}, \omega_+ + \overline{a})$. Segue que

$$\overline{\varphi} = \begin{cases} \varphi(t), t \in (\omega_-, \omega_+) \\ \tilde{\varphi}(t), t \in [\omega_+, \omega_+ + \overline{a}) \end{cases}$$

seria solução do PVI (2.1.1) no intervalo $\tilde{I}$ que contém propriamente I. Mas isto é um absurdo. ∎

Referências Bibliográficas

[1] B. Beauzamy. Introduction to Banach spaces and their Geometry. North-Holland Mathematics Studies (1982).

[2] H. Brezis. Analyse Fonctionnelle- Thèorie et Applications. Masson (1987).

[3] K. Deimling. Ordinary Differential Equations in Banach Spaces. Lectures Note in Mathematics 596. Springer-Verlag (1977).

[4] J. Diestel and J. J. Ulh Jr. Vector Measures. Mathematics Survey no. 15. Am. Math. Soc., Providence, Rodhe Island (1977).

[5] I. Ekeland and J. P. Aubin. Applied Nonlinear Analysis. John Wiley and Sons (1984).

[6] D. G. Figueiredo. Equações Diferenciais Aplicadas. Coleção Matemática Universitária. SBM (1989).

[7] C. S. Hönig. Aplicações da Topologia à Análise. Projeto Euclides, IMPA (1976).

[8] V. I. Istratescu. Fixed Points Theory, An Introduction. D. Reidel Publishing Company (1988).

[9] K. Kuratowski. Topology, vol. III. Academic Press, New York (1966).

[10] V. Lakshmikanthan and S. Leela. Nonlinear Differential Equations in Abstract Spaces. International Series in Nonlinear Mathematics, Pergamon Press (1981).

[11] R. R. Phelps. Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability. LNM 1364. Springer-Verlag (1988).

[12] V. Barbu. Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces. Nordoff Inst. Publishing (1976).

Índice Remissivo