Cálculo Diferencial e Integral: um KIT de sobrevivência

Prof. Doherty Andrade

Coordenadas Polares - Integração

A integral de uma função f sobre uma região D expressa em coordenadas retangulares é dada por

$$\int\int f(x,y)\, dy\, dx$$

.

Se a região é descrita em coordenadas polares, a integral é avaliada como

$$\int\int f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\, r\, dr\, d\theta$$

.

com os limites de integração apropriados. A ordem de integração é aquela que é mais conveniente. Vamos ver alguns exemplos.

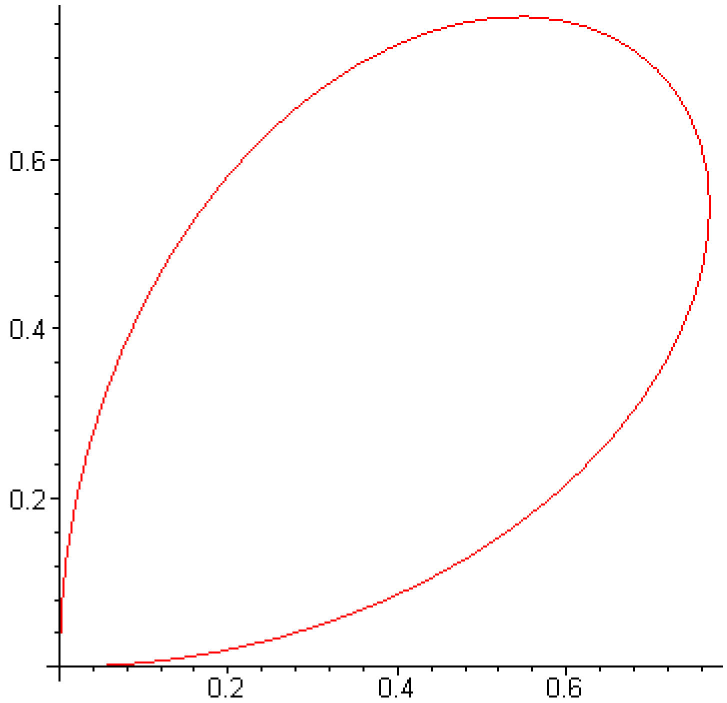
Tente desenhar as curvas, isto ajuda a determinar os limites de integração.

Exemplo 1

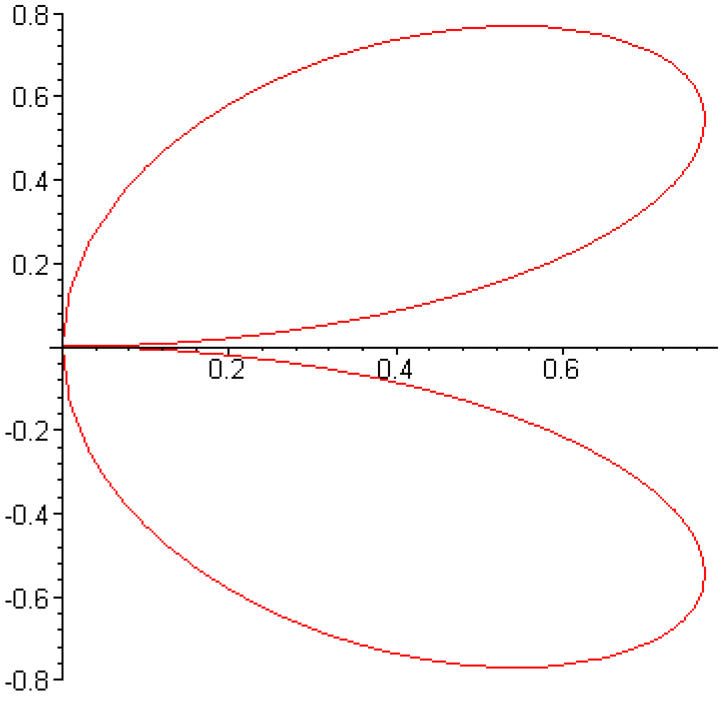
Determine a área encerrada pela curva $r = \sin(2\,\theta)$ **.**

Vamos primeiramente desenhar a curva .

```
> plot([sin(2*theta),theta,theta=0..Pi/2],coords=polar);
```



> **plot([sin(2*theta),theta,theta=0..1*Pi],coords=polar);**



Observe que a área a ser encontrada é a área no primeiro quadrante multiplicada por 4. Neste caso a função

$f(r, \theta) = 1$

é a constante 1.

> **4*Int(Int(f(r,theta),r=0..sin(2*theta)),theta=0..Pi)=4*int(int(1*r,r=0..sin(2*theta)),theta=0..Pi);**

$$4\int_0^{\pi}\int_0^{\sin(2\,\theta)} f(r,\theta)\,dr\,d\theta=\pi$$

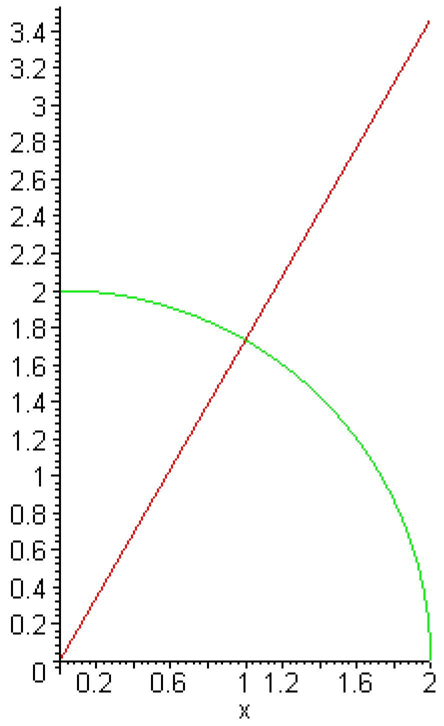
Exemplo 2

Avalie $\displaystyle\iint x+y\,dy\,dx$ **na região abaixo.**

A região D está no primeiro quadrante, dentro do círculo $x^2+y^2=a^2$ e abaixo da curva $y=\sqrt{3}\,x$.

Desenhamos as curvas para o caso a = 2.

> **plot({sqrt(4-x^2),sqrt(3)*x},x=0..2,scaling=constrained);**



Precisamos saber o ângulo entre os eixos esta reta. Lembramos que este angulo é $\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.

> **arctan(sqrt(3)/1);**

$$\frac{1}{3}\pi$$

Assim, a integral pode ser calculada como

$$\int\int x + y \, dy \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^1 r\cos(\theta) + r\sin(\theta)\, r \, dr \, d\theta$$

> **Int(Int(r*cos(theta)+r*sin(theta)*r,r=0..1),theta=0..Pi/3)=int(int(r*cos(theta)+r*sin(theta)*r,r=0..1),theta=0..Pi/3);**

$$\int_0^{\frac{1}{3}\pi} \int_0^1 r\cos(\theta) + r^2 \sin(\theta)\, dr \, d\theta = \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{6}$$

Exemplo 3

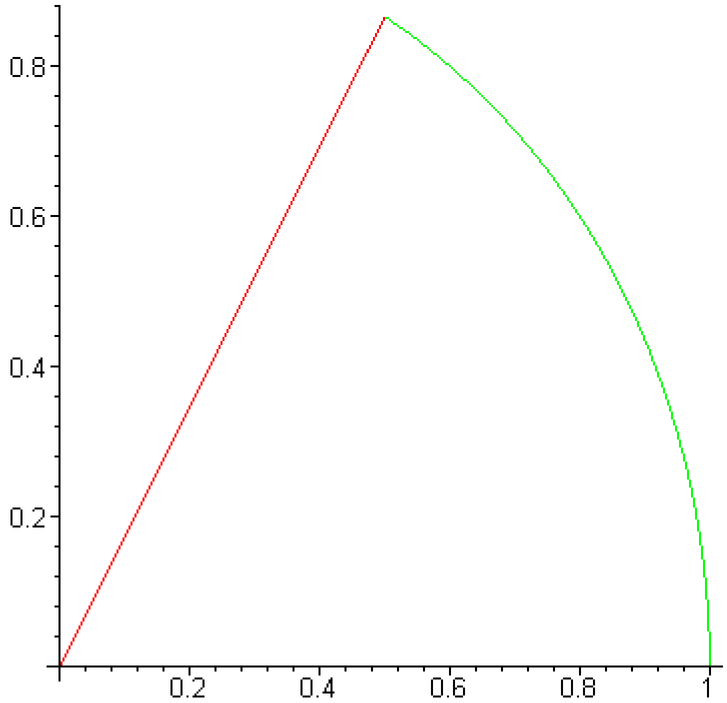
Determinar o centróide de um setor de um círculo

A região D está no primeiro quadrante, dentro do circulo r = a, e abaixo da reta $\theta = \alpha$. Vamos desenhar a curva no caso

$$\alpha = \frac{\pi}{3}$$

.

> **plot({[r,Pi/3,r=0..1],[1,theta,theta=0..Pi/3]},coords=polar);**



Queremos determinar o centro de massa desta região. Lembramos que as coordenadas são dadas por

$\underline{x} = \dfrac{\int\int x\,dy\,dx}{\int\int 1\,dy\,dx}$ e $\underline{y} = \dfrac{\int\int y\,dy\,dx}{\int\int 1\,dy\,dx}$

estas expressões podem ser reescritas como integrais em coordenadas polares.

> **x[barra]:=int(int(r*cos(theta)*r,r=0..a),theta=0..alpha)/int(int(1*r,r=0..a),theta=0..alpha);**

$$x_{barra} := \frac{2}{3} \frac{\sin(\alpha)\, a}{\alpha}$$

> **y[barra]:=int(int(r*sin(theta)*r,r=0..a),theta=0..alpha)/int(int(1*r,r=0..a),theta=0..alpha);**

$$y_{barra} := 2 \frac{-\frac{1}{3}\cos(\alpha)\, a^3 + \frac{1}{3} a^3}{\alpha\, a^2}$$